

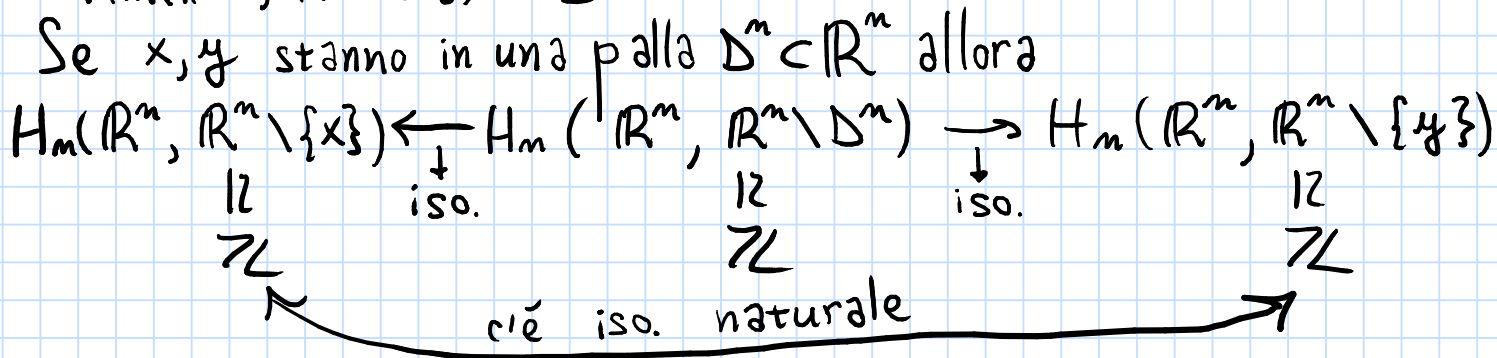
Def.: un'orientazione su una m -var. M è una funzione che $\forall x \in M$ assegna $\mu_x \in H_m(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ che genera (orientazione locale) e t.c. $\forall x \in M$ $\xrightarrow{\text{escissione}}$

$\exists N$ intorno cpt e classe $\mu_N \in H_m(M, M \setminus N)$ t.c.

$$i_y: H_m(M, M \setminus N) \rightarrow H_m(M, M \setminus \{y\}) \quad \forall y \in N.$$

$$\mu_N \mapsto \mu_y \quad \text{escissione}$$

Oss.: $x \in M$ ha intorno omeo. a $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} H_m(M, M \setminus \{x\}) \cong H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$.



Def.: una m -var. è orientabile se \exists orientazione.

Una m -var. M orientata è il dato di $M +$ orientazione.

Mi piacerebbe avere $\mu \in H_m(M)$ e t.c. si restringa alle orientazioni locali $\mu_x \in H_m(M, M \setminus \{x\})$, ma non è possibile se M non è cpt (ogni classe di omologia ha supp. cpt).

Teo.: M m -var. ori. da μ . \forall cpt $K \subset M \exists!$ $\mu_K \in H_m(M, M \setminus K)$ t.c.

$$p_x(\mu_K) = \mu_x \quad \forall x \in K, \text{ dove } p_x: H_m(M, M \setminus K) \rightarrow H_m(M, M \setminus \{x\}).$$

Oss.: M cpt $\Rightarrow \exists!$ classe globale associata all'orientazione.

Lemma: M var. m -dim., G grp ab.

(a) $\forall K \subset M$ cpt, $i > m$, $H_i(M, M \setminus K; G) = 0$;

(b) $u \in H_m(M, M \setminus K; G)$, $p_x(u) = 0 \forall x \in K \Rightarrow u = 0$.

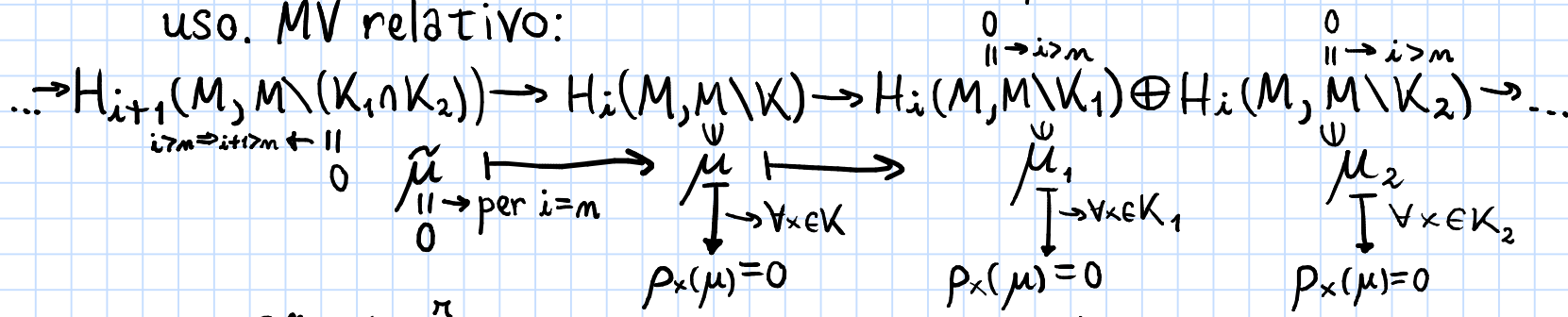
Oss.: (b) \Rightarrow unicità del teo.

Dim. (del lemma): per casi.

(1) $M = \mathbb{R}^m$, K convesso (supp $K \subset D^m$).

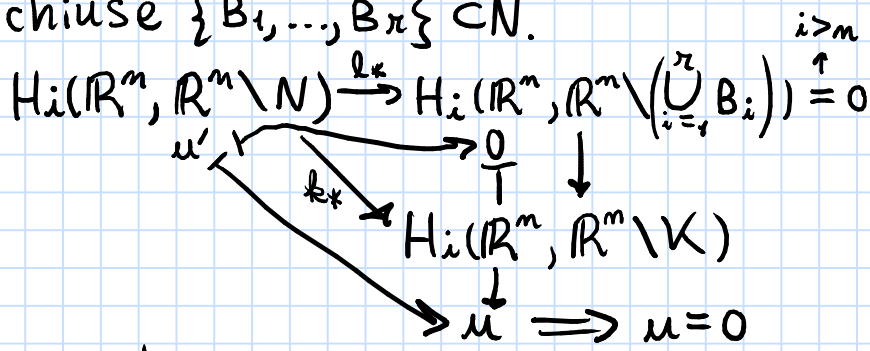
$$H_i(M, M \setminus K) \rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\}) \quad \forall x \in K \text{ è iso. } (\xrightarrow{\text{K convesso}} \text{si retrae su } x).$$

(2) $M = \mathbb{R}^m$, $K = K_1 \cup K_2$ t.c. vale il lemma per $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$, uso MV relativo:



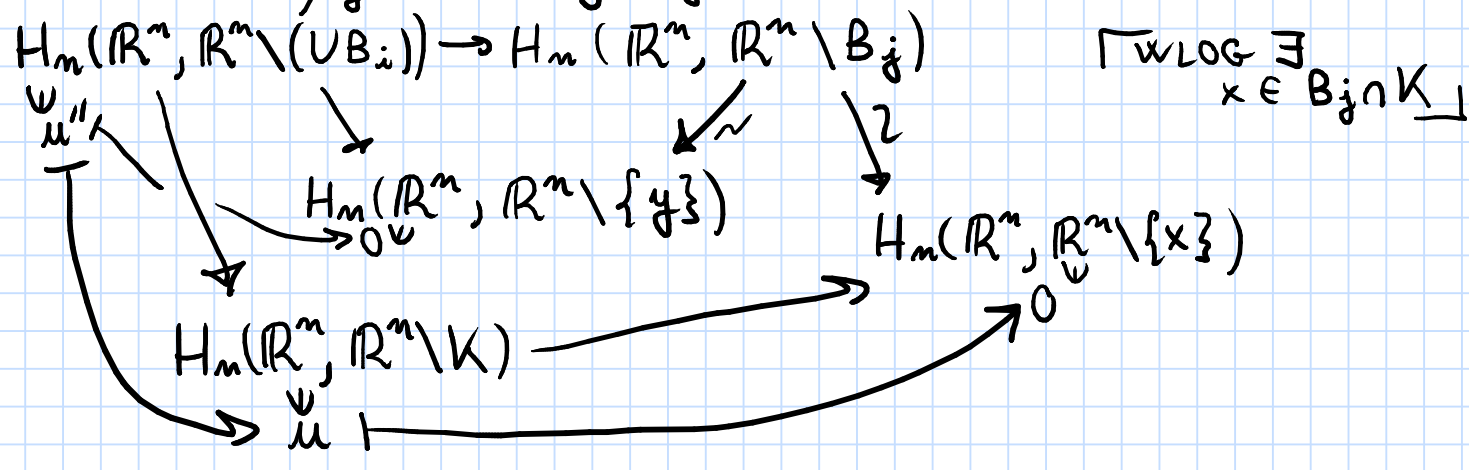
(3) $M = \mathbb{R}^m$, $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$, K_i cpt convessi, per induzione su n usando (1) e (2).

(4) $M = \mathbb{R}^m$, K cpt qualsiasi. $u \in H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus K)$. $\exists N$ aperto, $N \supset K$, $u' \in H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus N)$ t.c. u' restringe a u . $K \subset$ unione finita di palle chiuse $\{B_1, \dots, B_r\} \subset N$.



Per il pto (b), se $p_x(u) = 0 \forall x \in K$, $\lambda_x(u') = u$,

$$u'' = \lambda_*(u'). \quad p_y(u'') = 0 \quad \forall y \in B_j (\forall j):$$



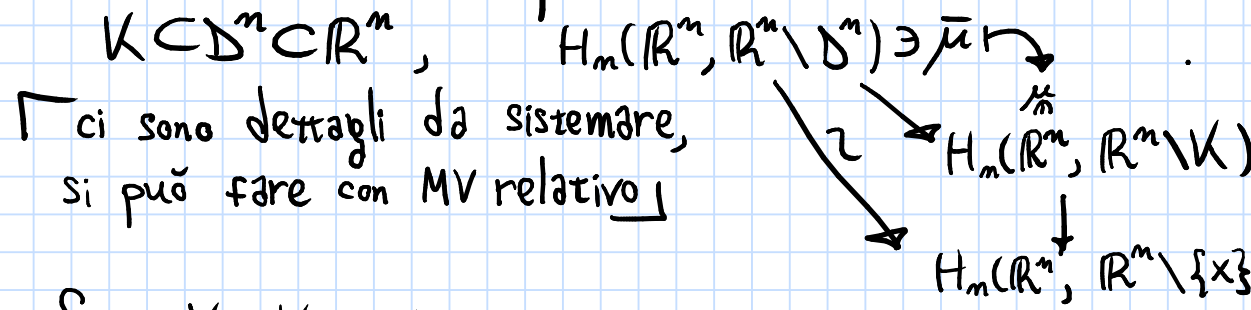
(5) M qualsiasi, $K \subset U \cong \mathbb{R}^m$: escissione.

(6) M qualsiasi, K qualsiasi: $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$, $K_i \subset U_i \cong \mathbb{R}^m$ e uso (5) + (2). \square

Oss.: il caso (3) si può saltare, e forse viene più facile.

Dim. (del Teo.): unicità dal lemma.

Esistenza: se $K \subset$ aperto omeo. a \mathbb{R}^m ok:



Se $K = K_1 \cup K_2$ ciascuno contenuto in un aperto omeo. a \mathbb{R}^m , uso MV relativo:

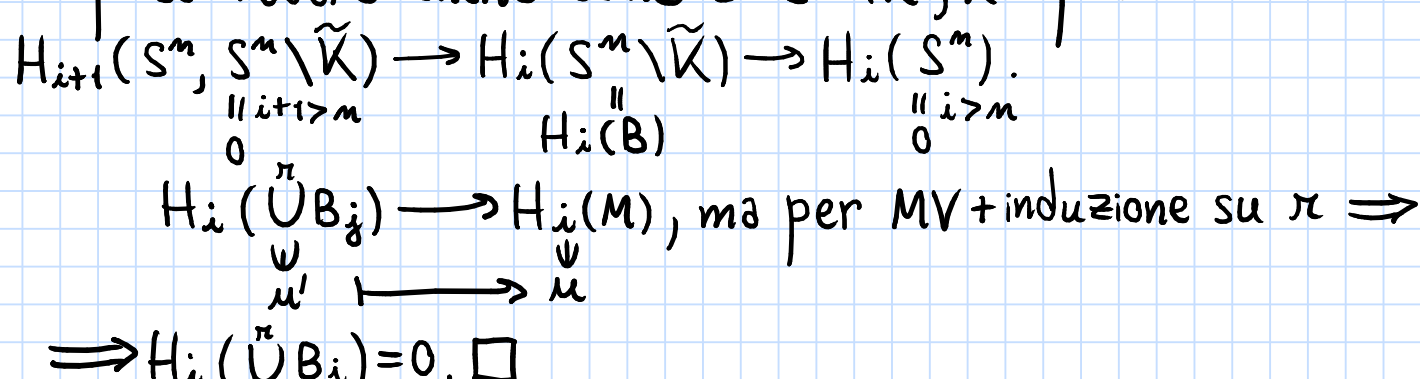
$$0 = H_{m+1}(M, M \setminus (K_1 \cap K_2)) \xrightarrow{\Delta} H_m(M, M \setminus K) \xrightarrow{\Psi} H_m(M, M \setminus K_1) \oplus H_m(M, M \setminus K_2) \xrightarrow{\Psi} H_m(M, M \setminus (K_1 \cap K_2))$$

$$\Psi(\mu_{K_1}, \mu_{K_2}) = 0 \text{ per l'unicità } \Rightarrow \exists! \mu_K \in H_m(M, M \setminus K), \mu_K \mapsto (\mu_{K_1}, \mu_{K_2}).$$

Se $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$, $K_i \subset U_i \cong \mathbb{R}^m$, t.c. μ_{K_i} esiste $\forall i \Rightarrow \mu_K \exists$ per induzione su r . \square

Cor.: M m -var., $i > m \Rightarrow H_i(M) = 0$.

Dim.: M cpt ok. Altrimenti uso che $u \in H_i(M)$ ha supp. cpt in K , $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$, B_j omeo. a aperto limitato di \mathbb{R}^m . Oss.: B aperto lim. di \mathbb{R}^m lo posso vedere anche come $B = S^m \setminus \tilde{K}$, \tilde{K} cpt.



Teo.: M var. m -dim. qualsiasi (anche non orientabile).

$\forall K \subset M$ cpt $\exists \mu_K \in H_m(M, M \setminus K; \mathbb{Z}/2)$ t.c.

$\forall x \in K$ μ_K restringe a $\mu_x \in H_m(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}/2)$, "orientazione mod 2".

Dim.: la stessa del teo. dell'orientazione. \square

Es.: S^m è ori.

- aperto di M ori. è ori.
- $\mathbb{R}P^m$ è ori. $\Leftrightarrow m$ è dispari
- $\mathbb{C}P^m$ ori. $\Rightarrow H^{2m}(\mathbb{C}P^m) \neq 0$ e si restringe a una classe $\neq 0$ in almeno un pto.