Def.: un'<u>orientazione</u> su una m-var. M è una funzione che $\forall x \in M$ assegna $\mu_x \in H_m(M, M\setminus\{x\}) \underset{\text{escissione}}{\simeq} \mathbb{Z}$ che genera (orientazione locale) e t.c. $\forall x \in M$ $\exists N$ intorno cpt e classe $\mu_N \in H_m(M, M\setminus N)$ t.c.

$$i_y : H_m(M, M\setminus N) \longrightarrow H_m(M, M\setminus\{y\}) \ \forall y \in N.$$
$$\mu_N \longmapsto \mu_y$$

Oss.: $x \in M$ ha intorno omeo. a $\mathbb{R}^n \overset{\text{escissione}}{\Longrightarrow} H_m(M, M\setminus\{x\}) \simeq$
$\simeq H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.

Se x, y stanno in una palla $D^n \subset \mathbb{R}^n$ allora

$$\begin{tikzcd}
H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x\}) \arrow[d, phantom, "\wr"] & H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus D^n) \arrow[l, "\text{iso.}"'] \arrow[r, "\text{iso.}"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{y\}) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\mathbb{Z} \arrow[rr, bend right, leftrightarrow, "\text{c'è iso. naturale}"] & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Def.: una m-var. è <u>orientabile</u> se $\exists$ orientazione.
Una m-var. M orientata è il dato di M + orientazione.

Mi piacerebbe avere $\mu \in H_m(M)$ e t.c. si restringa alle orientazioni locali $\mu_x \in H_m(M, M\setminus\{x\})$, ma non è possibile se M non è cpt (ogni classe di omologia ha supp. cpt).

Teo.: M m-var. ori. da $\underset{\text{orientazione}}{\mu}$. $\forall$ cpt $K \subset M$ $\exists! \mu_K \in H_m(M, M\setminus K)$ t.c. $\rho_x(\mu_K) = \mu_x \ \forall x \in K$, dove $\rho_x : H_m(M, M\setminus K) \to H_m(M, M\setminus\{x\})$.

Oss.: M cpt $\Rightarrow \exists!$ classe globale associata all'orientazione.

Lemma: M var. m-dim., G grp ab.
(a) $\forall K \subset M$ cpt, $i > m$, $H_i(M, M\setminus K; G) = 0$;
(b) $u \in H_m(M, M\setminus K; G)$, $\rho_x(u) = 0 \ \forall x \in K \Longrightarrow u = 0$.

Oss.: (b) $\Rightarrow$ unicità del teo..

Dim. (del lemma): per casi.

(1) $M = \mathbb{R}^n$, K convesso ($\operatorname{supp} K \subset \mathring{D}^n$).
$H_i(M, M\setminus K) \longrightarrow H_i(M, M\setminus\{x\})$ $\forall x \in K$ è iso. (K convesso $\Rightarrow$ si retrae su x).

(2) $M = \mathbb{R}^n$, $K = K_1 \cup K_2$ t.c. vale il lemma per $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$, uso MV relativo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & H_{i+1}(M, M\setminus(K_1\cap K_2)) \arrow[r] & H_i(M, M\setminus K) \arrow[r] & H_i(M, M\setminus K_1) \oplus H_i(M, M\setminus K_2) \arrow[r] & \cdots \\
& \tilde{\mu} \arrow[r, mapsto] & \mu \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\forall x \in K"] & \mu_1 \ \ \mu_2 \arrow[d, "\forall x \in K_1,\ \forall x \in K_2"] & \\
& & \rho_x(\mu) = 0 & \rho_x(\mu) = 0 \ \ \rho_x(\mu)=0 &
\end{tikzcd}$$

$H_{i+1}(M, M\setminus(K_1\cap K_2)) = 0$ ($i>m \Rightarrow i+1>m$); $\tilde{\mu} = 0$ per $i = m$; $H_i(M, M\setminus K_1) = 0$, $H_i(M, M\setminus K_2) = 0$ per $i > m$.

(3) $M = \mathbb{R}^n$, $K = \bigcup_{i=1}^{r} K_i$, K_i cpt convessi, per induzione su r usando (1) e (2).

(4) $M = \mathbb{R}^n$, K cpt qualsiasi. $u \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus K)$. $\exists N$ aperto, $N \supset K$, (WLOG a chiusura cpt) $u' \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus N)$ t.c. u' restringe a u. $K \subset$ unione finita di palle chiuse $\{B_1, \dots, B_r\} \subset N$.

$$\begin{tikzcd}
H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus N) \arrow[r, "l_*"] \arrow[dr, "k_*"'] & H_i\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{r} B_i\right)\right) \overset{i>m}{=} 0 \arrow[d] \\
& H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus K)
\end{tikzcd}$$

$u' \mapsto 0 \mapsto u \Longrightarrow u = 0$

Per il pto (b), se $\rho_x(u) = 0 \ \forall x \in K$, $k_*(u') = u$, $u'' = l_*(u')$. $\rho_y(u'') = 0 \ \forall y \in B_j (\forall j)$:

$$\begin{tikzcd}
H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus(\cup B_i)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B_j) \arrow[d, "\sim"] \arrow[dr, "\wr"] & \\
H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus K) \arrow[rr] & H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{y\}) & H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x\})
\end{tikzcd}$$

$u'' \mapsto 0 \in H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{y\})$, $u'' \mapsto u \mapsto 0 \in H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x\})$ ⌈WLOG $\exists x \in B_j \cap K$⌋

$\Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = 0$.

(5) M qualsiasi, $K \subset U \cong \mathbb{R}^n$: escissione.

(6) M qualsiasi, K qualsiasi: $K = \bigcup_{i=1}^{r} K_i$, $K_i \subset U_i \cong \mathbb{R}^n$ e uso (5)+(2). □

Oss.: il caso (3) si può saltare, e forse viene più facile.

Dim. (del Teo.): unicità dal lemma.
Esistenza: se $K \subset$ aperto omeo. a $\mathbb{R}^n$ ok:

$K \subset D^n \subset \mathbb{R}^n$,

$$\begin{tikzcd}
H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus D^n) \ni \bar{\mu} \arrow[r] \arrow[dr, "\wr"'] & H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus K) \ni \check{\mu} \arrow[d] \\
& H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{x\})
\end{tikzcd}$$

⌈ci sono dettagli da sistemare, si può fare con MV relativo⌋

Se $K = K_1 \cup K_2$ ciascuno contenuto in un aperto omeo. a $\mathbb{R}^n$, uso MV relativo:

$$0 = H_{m+1}(M, M\setminus(K_1\cap K_2)) \xrightarrow{\Delta} H_m(M, M\setminus K) \xrightarrow{\varphi} H_m(M, M\setminus K_1) \oplus H_m(M, M\setminus K_2) \xrightarrow{\psi} H_m(M, M\setminus(K_1\cap K_2))$$
$$\mu_K \qquad\qquad \mu_{K_1} \qquad \mu_{K_2} \qquad\qquad \mu_{K_1\cap K_2}$$

$\psi(\mu_{K_1}, \mu_{K_2}) = 0$ per l'unicità $\Rightarrow \exists! \mu_K \in H_m(M, M\setminus K)$, $\mu_K \overset{\varphi}{\mapsto} (\mu_{K_1}, \mu_{K_2})$.

Se $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$, $K_i \subset U_i \cong \mathbb{R}^n$, t.c. μ_{K_i} esiste $\forall i \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu_K \ \exists$ per induzione su r. □

Cor.: M m-var., $i > m \Rightarrow H_i(M) = 0$.

Dim.: M cpt ok. Altrimenti uso che $u \in H_i(M)$ ha supp. cpt in K, $K \subset \bigcup_{j=1}^{r} B_j$, B_j omeo. a aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Oss.: B aperto lim. di $\mathbb{R}^n$ lo posso vedere anche come $B = S^m\setminus\tilde{K}$, $\tilde{K}$ cpt.

$$\underset{\substack{\| \, i+1>m \\ 0}}{H_{i+1}(S^m, S^m\setminus\tilde{K})} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ H_i(B)}}{H_i(S^m\setminus\tilde{K})} \longrightarrow \underset{\substack{\| \, i>m \\ 0}}{H_i(S^m)}.$$

$$H_i\left(\bigcup^{r} B_j\right) \longrightarrow H_i(M), \text{ ma per MV + induzione su } r \Rightarrow$$
$$u' \longmapsto u$$

$\Rightarrow H_i\left(\bigcup^{r} B_j\right) = 0$. □

Teo.: M var. m-dim. qualsiasi (anche non orientabile).
$\forall K \subset M$ cpt $\exists \mu_K \in H_m(M, M\setminus K; \mathbb{Z}/2)$ t.c.
$\forall x \in K$ μ_K restringe a $\mu_x \in H_m(M, M\setminus\{x\}; \mathbb{Z}/2)$,
"orientazione mod 2".

Dim.: la stessa del teo. dell'orientazione. □

Es.:
- S^m è ori.
- aperto di M ori. è ori.
- $\mathbb{R}P^m$ è ori. $\Leftrightarrow m$ è dispari
- $\mathbb{C}P^m$ ori. $\Rightarrow H^{2m}(\mathbb{C}P^m) \neq 0$ e si restringe a una classe $\neq 0$ in almeno un pto.