Prodotto cap $\frown$

Considero $C^\cdot(X) = \mathrm{Hom}(C_\cdot(X), \mathbb{Z})$ che calcola $H^i(X)$.

$\langle\ ,\ \rangle : C^i(X) \times C_i(X) \to \mathbb{Z}\ \forall i$

lo posso considerare un morfismo di complessi in questo modo:
$C^\cdot$ lo penso come complesso di catene cambiando il grado

$D_i := C^{-i}$.

occhio al grado

$D_\cdot \otimes C_\cdot = C^\cdot \otimes C_\cdot \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$

pensato come complesso con $\mathbb{Z}$ in grado 0 e 0 altrove

$\varepsilon_0 : \bigoplus_i C^{-i} \otimes C_i \to \mathbb{Z}$ indotta da $\langle\ ,\ \rangle$,

$\varepsilon_j : \bigoplus_i C^{-i} \otimes C_{i+j} \to 0\ \forall j \neq 0$.

Lemma: ε è morfismo di complessi.

Dim.: $f \in C^i$, $\alpha \in C_{i+1}$, $d(f \otimes \alpha) = df \otimes \alpha + (-1)^i f \otimes d\alpha$,
$\varepsilon_0(d(f \otimes \alpha)) = \langle df, \alpha\rangle + (-1)^i \langle f, d\alpha\rangle = (-1)^{i+1} f(d\alpha) + (-1)^i f(d\alpha) =$
$= 0$. $\square$

Considero la composizione (di omo. di complessi):

$C^\cdot(X) \otimes C_\cdot(X) \xrightarrow{id \otimes \tilde{\Delta}} C^\cdot(X) \otimes C_\cdot(X) \otimes C_\cdot(X) \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} \mathbb{Z} \otimes C_\cdot(X) \simeq C_\cdot(X)$ (*),

$\tilde{\Delta} = EZ \circ \Delta$. (*) è composizione di morfismi di complessi $\Rightarrow$ è morfismo di complessi. Ho mappa in $H_\cdot$:

$$H^i(X) \otimes H_n(X) \xrightarrow[\text{Künneth}]{} H_{n-i}(C^\cdot(X) \otimes C_\cdot(X)) \xrightarrow{(*)} H_{n-i}(X)$$
$$(a, b) \longmapsto \underbrace{a \frown b}_{\text{prodotto cap}}$$

Oss.: $\frown$ non dipende dalla scelta di EZ (tutte omotope).

Posso dare una formula esplicita con approssimazione diagonale:
$\varphi \in C^p(X)$, $\sigma : \Delta^{p+q} \to X$, $\varphi \frown \sigma = (-1)^{pq} \varphi(\sigma_{|[e_q, \dots, e_{p+q}]}) \cdot \sigma_{|[e_0, \dots, e_q]} \in C_q(X)$.

Caso relativo:

$H^i(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \to H_{n-i}(X, B)$.

Uso $C_\cdot(X, A \cup B) \xrightarrow{\tilde{\Delta}} C_\cdot(X, A) \otimes C_\cdot(X, B)$:

$0 \to C_\cdot(A) \to C_\cdot(X) \to C_\cdot(X, A) \to 0$ da cui il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & C_\cdot(A) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & C_\cdot(X, B) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & C_\cdot(X, A \cup B) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 0 \\
 & C_\cdot(A \times (X, B)) \arrow[r] \arrow[d, "EZ"] & C_\cdot(X \times (X, B)) \arrow[r] \arrow[d, "EZ"] & C_\cdot((X, A) \times (X, B)) \arrow[d, "EZ"] & \\
0 \arrow[r] & C_\cdot(A) \otimes C_\cdot(X, B) \arrow[r] & C_\cdot(X) \otimes C_\cdot(X, B) \arrow[r] & C_\cdot(X, A) \otimes C_\cdot(X, B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Oss.: se $B = \emptyset$, $H^i(X, A) \otimes H_m(X, A) \to H_{m-i}(X)$.

Oss.: $\langle\ ,\ \rangle : C^i(X) \times C_i(X) \to \mathbb{Z}$ induce $\forall i$ $H^i(X) \otimes H_i(X) \to \mathbb{Z}$
(non dualità in generale).

Prop.: se $\alpha \in H^{m-i}(X)$, $\beta \in H^i(X)$, $\gamma \in H_m(X)$,
$\langle \alpha, \beta \frown \gamma \rangle = \langle \alpha \smile \beta, \gamma \rangle$.

Dim.: calcolo con formule esplicite. $\square$

Coomologia a supporto compatto

Data (X, A), $C^m(X, A; G) = \mathrm{Ker}(C^m(X; G) \to C^m(A; G))$.

Def.: $u \in C^m(X; G)$ ha <u>supporto compatto</u> se $\exists K$ cpt, $K \subset X$ t.c.
$u \in \mathrm{Ker} : C^m(X; G) \to C^m(X \setminus K; G)$.

Def.: $C^m_c(X; G)$ = insieme delle m cocatene a supp. cpt.

Ex.: $C^m_c(X; G)$ è un gruppo.

Oss.: $u \in C^m_c(X; G) \Rightarrow \delta u \in C^{m+1}_c(X; G)$: basta usare

$$\begin{tikzcd}
C^m(X; G) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & C^m(X \setminus K; G) \arrow[d, "\delta"] \\
C^{m+1}(X; G) \arrow[r] & C^{m+1}(X \setminus K; G)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
\delta u \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

Allora $C^\cdot_c(X; G)$ è complesso di cocatene.

Def.: $H^*_c(X; G) = H^*(C^\cdot_c(X; G))$.

Oss.: se X cpt, $H^*_c(X; G) = H^*(X; G)$ perché $C^m_c(X; G) = C^m(X; G)$.

Oss.: H^*_c non è invariante omotopico, ma è invariante topologico.

Ex.: $H^0_c(\mathbb{R}) = 0$.

Def. alternativa

Def.: $(\Lambda, \leqslant)$ poset è <u>insieme diretto</u> se $\forall \alpha, \beta \in \Lambda\ \exists \gamma \in \Lambda$ t.c. $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$.

Un <u>sistema diretto di gruppi abeliani</u> indicizzato da Λ insieme diretto è dato da $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ gruppi abeliani e $\{\varphi_{\alpha\beta} : A_\alpha \to A_\beta\}_{\alpha \leqslant \beta}$ omo. t.c.
$\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \Rightarrow \varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\alpha} = id_{A_\alpha}$.

<u>Limite diretto</u> (o colimite) del sis. dir. di grp ab. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ è
$\varinjlim A_\alpha := \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha / \langle a_\alpha - \varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha) \rangle_{\alpha \leqslant \beta,\ a_\alpha \in A_\alpha}$.

Oss.: ogni elemento di $\varinjlim A_\alpha$ è rappresentato da $a_\gamma \in A_\gamma$. Se ho
$\sum_{i=1}^m a_{\alpha_i} \sim \sum_{i=1}^m \varphi_{\alpha_i \gamma}(a_{\alpha_i}) \in A_\gamma$ dove prendo γ "grande".

Lemma: se $(A_\alpha), (B_\alpha), (C_\alpha)$ sono sis. dir. di grp ab. su Λ e $\forall \alpha \in \Lambda$ ho $0 \to A_\alpha \to B_\alpha \to C_\alpha \to 0$ esatta e per $\alpha \leqslant \beta$ ho

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^A_{\alpha\beta}"] & B_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^B_{\alpha\beta}"] & C_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^C_{\alpha\beta}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_\beta \arrow[r] & B_\beta \arrow[r] & C_\beta \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
che commuta,

allora ho $0 \to \varinjlim A_\alpha \to \varinjlim B_\alpha \to \varinjlim C_\alpha \to 0$ esatta.

Dim.: ex. $\square$

Cor.: limite diretto di succ. esatte lunghe è esatto.

Dim.: passo da $\dots \to A_{m,\alpha} \xrightarrow{f_{m,\alpha}} A_{m+1,\alpha} \to \dots$ a
$0 \to \underset{\mathrm{coKer}\, f_{m-1,\alpha}}{\mathrm{Ker}\, f_{m,\alpha}} \to A_{m,\alpha} \to \underset{\mathrm{Ker}\, f_{m+1,\alpha}}{\mathrm{coKer}\, f_{m,\alpha}} \to 0$.

Dettagli per ex. $\square$

Considero $\Lambda = \{K \subseteq X,\ K \text{ cpt}\}$, $K \leqslant L \overset{\text{def.}}{\iff} K \subseteq L$ è un sistema diretto.

$C^i(X, X \setminus K; G)$ è sistema diretto indicizzato da Λ.

Se $K \subseteq L$, $C_i(X, X \setminus L) \to C_i(X, X \setminus K)$ è suri. $\Rightarrow$
$\Rightarrow C^i(X, X \setminus K) \xrightarrow[\varphi_{KL}]{} C^i(X, X \setminus L)$ è ini. e

$C^i_c(X; G) = \bigcup_K C^i(X, X \setminus K; G) = \varinjlim C^i(X, X \setminus K; G)$ e
questo è compatibile con i bordi.

Prop.: $H(-)$ commuta con il limite diretto.

Dim.: segue dal lemma applicato a
$0 \to \mathrm{Im}\, d^{i-1}_K \to \mathrm{Ker}\, d^i_K \to H^i_K \to 0$ da cui

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{Im}\, d^{i-1}_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varinjlim \mathrm{Ker}\, d^i_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varinjlim H^i_K(-) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, d^{i-1} \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, d^i \arrow[r] & H^i(\varinjlim(-)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e applico il lemma dei cinque. $\square$

Quindi $\varinjlim_K H^i(X, X \setminus K; G) = H^i_c(X; G)$.

Teo. (MV a supp. cpt): $X = U \cup V$ (Hausdorff) aperti $\Rightarrow \exists$ succ. esatta lunga
$\dots \to H^i_c(U \cap V) \to H^i_c(U) \oplus H^i_c(V) \to H^i_c(X) \to H^{i+1}_c(U \cap V) \to \dots$

Dim.: L, K cpt,
$\to H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \to H^i(X, X \setminus K) \oplus H^i(X, X \setminus L) \to H^i(X, X \setminus (K \cup L)) \to$,
considero $K \subset U$, $L \subset V$, fissato K faccio il limite in L:
$\to \varinjlim_L H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \to H^i(X, X \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(X, X \setminus L) \to \varinjlim_L H^i(X, X \setminus (K \cup L)) \to$,
ora faccio il limite in K:

$$\begin{array}{ccccccc}
\to \varinjlim_{K,L} H^i(X, X \setminus (K \cap L)) & \to & \varinjlim_K H^i(X, X \setminus K) & \oplus & \varinjlim_L H^i(X, X \setminus L) & \to & \varinjlim_{K,L} H^i(X, X \setminus (K \cup L)) \to \\
\| \text{ escissione} & & \| & \text{escissione} & \| & & \| \\
\varinjlim_{K,L} H^i(U \cap V, U \cap V \setminus (K \cap L)) & & \varinjlim_K H^i(U, U \setminus K) & & \varinjlim_L H^i(V, V \setminus L) & & H^i_c(X). \\
\| & & \| & & \| & & \\
H^i_c(U \cap V) & & H^i_c(U) & & H^i_c(V) & & \square
\end{array}$$