Oss.: M n-var. ori.. $\forall K$ cpt $\exists \mu_K \in H_n(M, M\setminus K)$; se $L \subset K$ cpt, $\mu_K \mapsto \mu_L$.

Oss.: consideriamo il cap prod. con μ_K,

$$\rho_K : H^i(M, M\setminus K) \longrightarrow H_{n-i}(M)$$
$$\alpha \longmapsto \alpha \cap \mu_K$$

Per $K \subset L$ cpti ho

$$\begin{tikzcd} H^i(M,M\setminus K) \arrow[dr, "\rho_K"] \arrow[d] & \\ H^i(M,M\setminus L) \arrow[r, "\rho_L"'] & H_{n-i}(M) \end{tikzcd}$$

che commuta.

Considerando $\varinjlim$ su $K \subset M$ ho

$$\rho_M : H^i_c(M) \xrightarrow{\cap \mu_K} H_{n-i}(M).$$

Teo. (dualità di Poincaré): M n-var ori. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \rho_M : H^i_c(M; G) \longrightarrow H_{n-i}(M; G)$ è iso. $\forall$ i.

Dim.: ① $M = \mathbb{R}^n$, considero B_r palla chiusa di raggio $r \in \mathbb{N}$.
Ho $H^q_c(\mathbb{R}^n; G) = \varinjlim_K H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus K; G) = \varinjlim_r H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_r; G)$
(le palle sono cofinali ai cpti).
$H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B_r; G) \to H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B_{r+1}; G)$ è iso. $\xRightarrow{\text{escissione}}$
$$\Rightarrow H^q_c(\mathbb{R}^n; G) = \begin{cases} G & \text{se } q=n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \simeq H_{n-q}(\mathbb{R}^n; G).$$

Devo dire che ρ è l'iso., ovvero
$$\rho : H^n{}_c(\mathbb{R}^n; G) \to H_0(\mathbb{R}^n; G) \text{ iso..}$$

Basta mostrare
$$\rho_B : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B; G) \xrightarrow{\cap \mu_B} H_0(\mathbb{R}^n; G) \text{ iso. } \forall\, B \text{ palla.}$$
(μ_B generatore di $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B; G)$)

$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B; G) \simeq \mathrm{Hom}(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B; G), G)$ (coeff. univ.), quindi è generato da una cocatena μ_B^* che dà l'iso. tra $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B; G)$ e G. (per questa dim. servirebbe G ciclico, ma si può fare anche senza)
$\langle \alpha, \beta \cap \gamma \rangle = \langle \alpha \cup \beta, \gamma \rangle$, α generatore di $H^0(\mathbb{R}^n; G)$,
$\beta = \mu_B^*$, $\gamma = \mu_B$, quindi $\cap \mu_B$ dà l'iso..

② Se ho U, V aperti t.c. Poincaré vale per $U, V, U\cap V$, pongo $M := U \cup V$ e per MV ho

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & H^{q-1}_c(M) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_M"] & H^q_c(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{U\cap V}"] & H^q_c(U) \oplus H^q_c(V) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_U \;\; \rho_V"] & H^q_c(M) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_M"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_{n-q+1}(M) \arrow[r] & M_{n-q}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-q}(U) \oplus H_{n-q}(V) \arrow[r] & H_{n-q}(M) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

che commuta (non banale), quindi uso lemma dei cinque.

③ Se M è unione crescente di aperti U_i per i quali vale Poincaré, abbiamo lim. diretti

$$\begin{tikzcd} H_{n-q}(U_1) \arrow[r] & H_{n-q}(U_2) \arrow[r] & \cdots \\ H^q_c(U_1) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\circledast"] & H^q_c(U_2) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

che commuta (non banale): $\circledast$ la definisco tramite $H^q(U_1, U_1\setminus K) \longrightarrow H^q(U_2, U_2\setminus K)$ per escissione.
$\bigcup_j U_j = M \Rightarrow \varinjlim_j H_{n-q}(U_j) = H_{n-q}(M)$ e $\varinjlim_j H^q_c(U_j) = H^q_c(M)$ e un qualsiasi cpt K è contenuto in U_j per qualche j, quindi l'iso. di Poincaré passa al limite diretto.

④ M aperto di $\mathbb{R}^n$. Se M convesso ok, altrimenti M è unione numerabile di palle aperte e se pongo $M = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j$,
$M_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$: per M_k vale applicando ②, poi per M applico ③.

⑤ In generale: data M qualsiasi prendo tutti gli aperti di M per cui vale. Per Zorn ho elemento massimale V.
Se $V \neq M$, prendo $B \subset M$, $B \simeq \mathbb{R}^n$, $B \not\subset V$; per ④, Poincaré vale per $B \cap V$, quindi per ② vale per $B \cup V$, contraddizione. $\square$ ⚠ servono ipotesi su M per problemi di cardinalità

Poincaré mod 2: se usiamo l'orientazione mod 2,
Teo.: $\rho_2 : H^q_c(M; \mathbb{Z}_2) \to H_{n-q}(M; \mathbb{Z}_2)$ è iso. $\forall q$ se M è n-var.. Dim.: identica. $\square$

Quindi abbiamo
$$H^q_c(M) \otimes H^{n-q}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$
$$\alpha \otimes \beta \longmapsto \langle \beta, \rho_M(\alpha) \rangle = \beta(\alpha \cap \mu_M)$$

Se M è cpt, ho $\alpha \otimes \beta \longmapsto \langle \beta \cup \alpha, \mu_M \rangle = (\beta \cup \alpha)(\mu_M)$.

Def.: A, B R-moduli, $A \otimes B \to R$ è <u>dualità</u> se induce iso.
$A \to \mathrm{Hom}(B, R)$, $B \to \mathrm{Hom}(A, R)$.

Prop.: se M è n-var. connessa cpt ori. (o solo cpt, $R = \mathbb{Z}_2$), allora il prodotto cup è dualità $H^q(M;R) \otimes H^{n-q}(M;R) \to H^n(M;R) \simeq R$ se R è campo o se $R = \mathbb{Z}$ (modulo la torsione di $H^*(M;\mathbb{Z})$).

Dim.:
$$\begin{tikzcd} H^{n-q}(M;R) \arrow[r, "h"] & \mathrm{Hom}(H_{n-q}(M;R), R) \arrow[d, "D"] \\ & \mathrm{Hom}(H^q(M;R), R) \end{tikzcd}$$
(h: coeff. univ.; D: duale dell'iso. di Poincaré)

$\psi \in H^{n-q}(M;R)$, $Dh : \psi \longmapsto (\varphi \longmapsto \underbrace{\psi(\varphi \cap \mu_M)}_{(\psi \cup \varphi)(\mu_M)})$.

Per R campo o modulo la torsione h è iso., D è iso. perché duale di iso.; quindi $H^{n-q}(M) \to \mathrm{Hom}(H^q(M;R), R)$ è iso. e usando l'anti-commutatività di $\cup$ ho che
$$H^q(M;R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{n-q}(M;R), R) \text{ è iso..}$$
$$\varphi \longmapsto (\psi \longmapsto \psi(\varphi \cap \mu_M) = (\psi \cup \varphi)(\mu_M)). \ \square$$

Coomologia di $\mathbb{CP}^n$

Teo.: $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ con x generatore di $H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$.

Dim.: $\mathbb{CP}^n$ cpt $\Rightarrow H^i(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \simeq H^i_c(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$.
Per costruzione $\underset{\wr\,\mathbb{Z}}{H^0(\mathbb{CP}^n)} \otimes H^i(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\cup} H^i(\mathbb{CP}^n)$ mi dà la struttura di $\mathbb{Z}$-modulo. Voglio mostrare che
$x^i = \underbrace{x \cup x \cup \ldots \cup x}_{i \text{ volte}}$ genera $H^{2i}(\mathbb{CP}^n)$, $i \leq n$.

Per induzione su n:
$n = 1$ banale perché $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$.
Ricordo che $\mathbb{CP}^n$ è CW-c. con una $2i$-cella $\forall i = 0, 1, \ldots, n$ e $\mathbb{CP}^{n+1}$ si ottiene incollando a $\mathbb{CP}^n$ una $2(n+1)$-cella.
Allora $i^* : H^q(\mathbb{CP}^{n+1}) \to H^q(\mathbb{CP}^n)$ per $q \leq 2n$ è iso., infatti $H^q(\mathbb{CP}^{n+1}, \mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 2n+2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e guardo la succ. esatta della coppia.
$x \in H^2(\mathbb{CP}^{n+1})$ generatore $\Rightarrow$ i^*x generatore di $H^2(\mathbb{CP}^n)$ e i^*x^n genera $H^{2n}(\mathbb{CP}^n) \Rightarrow x^n$ genera $H^{2n}(\mathbb{CP}^{n+1})$.
Dualità di Poincaré mi dà:
$$H^i(\mathbb{CP}^{n+1}) \otimes H^{2n+2-i}(\mathbb{CP}^{n+1}) \xrightarrow{\cup} H^{2n+2}(\mathbb{CP}^{n+1}) \simeq \mathbb{Z}$$
e induce iso. $H^i(\mathbb{CP}^{n+1}) \to \mathrm{Hom}(H^{2n+2-i}(\mathbb{CP}^{n+1}), \mathbb{Z})$;
in particolare $H^2(\mathbb{CP}^{n+1}) \otimes H^{2n}(\mathbb{CP}^{n+1}) \to H^{2n+2}(\mathbb{CP}^{n+1})$.
$$x \otimes x^n \longmapsto x^{n+1}$$
(x^{n+1} dev'essere generatore) $\square$

Cor.: $H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$, $x \in H^2$.
Analogamente, si può mostrare che
Teo.: $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$, $x \in H^1$
e $H^*(\mathbb{HP}^n) \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, $x \in H^4$.

<u>Gruppi di omotopia</u>

Lavoriamo con Top^* (s.t. puntati).
Se $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathrm{Top}^*$, scrivo $[(X, x_0), (Y, y_0)] :=$ classi di omotopia di mappe tra spazi puntati.

Def.: $SX = X \times I/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)$ si dice <u>sospensione ridotta</u> di X.

Oss.: $\Sigma X = X \times I/_{(x,0)\sim(y,0),\ (x,1)\sim(y,1)}$; per X "ragionevole" (es.: CW-c.), ΣX e SX sono omotop. equiv..

Fissiamo un pto base $*$ in S^n.
Def.: $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)] = [S^n, X]^0$. (classi di omotopia di mappe puntate)
Per $n = 0$, π_0 è solo un insieme, per $n = 1$ è il gruppo fondamentale, per $n > 1$ serve una struttura di gruppo:
$I^n = [0,1]^n$, $I^n/\partial I^n$ insieme puntato in $[\partial I^n]$.

Lemma: $I^n/\partial I^n \simeq S^n$.
Dim.: definisco il prodotto smash di spazi puntati:
$X \wedge Y = X \times Y/(X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)$. Date $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ mappe di spazi puntati inducono $f \wedge g : X \wedge Y \to X' \wedge Y'$.

$n = 1$: ok.
$n = 2$: $I/\partial I \wedge I/\partial I = I^2/\partial I^2$, $S^1 \wedge S^1 \simeq S^2$.
$(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \wedge (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.
In generale $I^n/\partial I^n = (I/\partial I)^{\wedge n} \simeq (S^1)^{\wedge n} \simeq S^n$. $\square$