Cor.: $\pi_n(X,x_0)=[(I^n/\partial I^n,[\partial I^n]),(X,x_0)]$

$\qquad [f],[g]\in [(I^n,\partial I^n),(X,x_0)]$ $\rightarrow$ costanti in ∂I^n

Def.: $[f]+[g]=[h]$, $h(t_1,\dots,t_n)=\begin{cases} f(2t_1,t_2,\dots,t_n) & t_1\leq \frac{1}{2}\\ g(2t_1-1,t_2,\dots,t_n) & t_2\geq\frac{1}{2}\end{cases}$

Prop.: $\pi_n(X,x_0)$ è gruppo per $n\geq 1$, abel per $n\geq 2$.

Dim.: elem. neutro: cost. $[x_0]$;

$-f$: $(t_1,\dots,t_n)\longmapsto(1-t_1,t_2,\dots,t_n)$;

associatività: ok;

commutatività ($n\geq 2$): $\boxed{f \mid g} = \boxed{\begin{array}{c|c} f & x_0\\ \hline x_0 & g\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c|c} x_0 & f\\ \hline g & x_0\end{array}} = \boxed{g \mid f}$. $\square$

Oss.: posso considerare $[(S^n\wedge X,*),(Y,y_0)]$, è un gruppo per $n\geq 1$, abel. per $n\geq 2$.

Notazione: $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sono le mappe continue da X in Y con la topologia cpt-aperta; X,Y spazi puntati, $\mathrm{Hom}(X,Y)^0$ sono le mappe puntate.

Prop.: X,Y,Z spazi puntati, Y loc. cpt; $\exists$ bigezione che è omeo. $\mathrm{Hom}(X\wedge Y,Z)^0\longrightarrow \mathrm{Hom}(X,\mathrm{Hom}(Y,Z)^0)^0$.

Dim.: no. $\square$

Def.: (X,x_0) puntato, $\Omega X:=\mathrm{Hom}(S^1,X)^0$ "spazio dei loop su X".

Cor.: $\underset{(t,x)\overset{f}{\mapsto} y}{[SX,Y]^0}\simeq \underset{x\mapsto\gamma,\ \gamma_t=f(t,x)}{[X,\Omega Y]^0}$ "iso. aggiunto in omotopia".

Cor.: $\pi_{n+1}(X,x_0)\simeq\pi_n(\Omega X,x_0)$.

Dim.: $[S^{n+1},X]^0=[S(S^n),X]^0=[S^n,\Omega X]^0$. $\square$

Oss.: in ΩX ho un prodotto $f,g: I/\partial I\to X$

$f*g: I/\partial I\to X$

$t\mapsto\begin{cases} f(2t) & t\leq 1/2\\ g(2t-1) & t\geq 1/2\end{cases}$

Prop.: $m:\Omega X\times\Omega X\to\Omega X$ ha le seguenti proprietà:

1) continua
2) $f\mapsto f*x_0$ e $f\mapsto x_0*f$ sono omotope all'identità
3) $m(\mathrm{Id}\times m)$ e $m(m\times \mathrm{Id})$ sono omotope
4) $f\longmapsto f*f^-$, $f\longmapsto f^-*f$ sono omotope a Id.

Dim.: no. $\square$

Cor.: $[X,\Omega Y]^0$ è un gruppo.

Oss. (dipendenza dal punto base): suppongo $\pi_0(X)=1$, $x_0,x_1\in X$, $\Omega_{x_0}X$, $\Omega_{x_1}X$ spazi di loop basati in x_0,x_1.

Dato $\gamma: I\to X$ cammino da x_0 a x_1,

$\underset{\Omega_{x_1}\to\Omega_{x_0}}{f\mapsto\gamma*f*\gamma^-}$ e induce

$$\begin{tikzcd} \pi_i(\Omega_{x_1}X,x_1) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \pi_i(\Omega_{x_0}X,x_0) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \pi_{i+1}(X,x_1) \arrow[r, "\gamma_*"] & \pi_{i+1}(X,x_0) \end{tikzcd}$$

iso. di gruppi (inversa γ_*^-); in particolare, $\pi_1(X,x_0)$ agisce su $\pi_n(X,x_0)$, $n\geq 1$. Se $\pi_1(X,x_0)$ è banale (o agisce in modo banale su π_n), $\pi_n(X,x_0)$, $\pi_n(X,x_1)$ sono naturalmente iso..

Def.: una mappa $E\xrightarrow{p}B$ si dice <u>fibrazione</u> ($\rightarrow$ di Hurewicz) se ha la proprietà del sollevamento dell'omotopia (HLP) per ogni spazio X, cioè se ho $h: X\times I\to B$ e $a: X\to E$ t.c. $pa(x)=h(x,0)$, allora $\exists$ H t.c.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i_0^X"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

commuta.

H si dice <u>sollevamento</u> di h con condizione iniziale a.

Chiamo $E\xrightarrow{p}B$ <u>fibrazione di Serre</u> se vale la HLP per $X=I^n$ $\forall n$.

Chiamo $p^{-1}(b_0)=F$ la fibra di p.

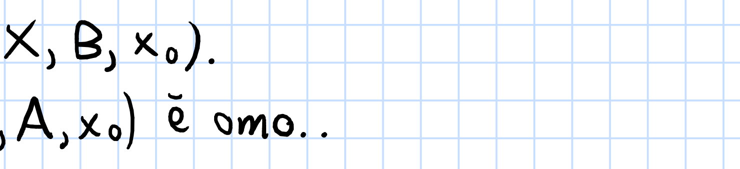
<u>Gruppi di omotopia relativa</u>

Per $n\geq 1$, $J^n=\partial^n I^n\times I\cup\{0\}\times I^n=\partial I^{n+1}\setminus\{1\}\times I^n$,

$n=0$, $J^0=\{0\}\subset\partial I$.

Def.: $\pi_{n+1}(X,A,x_0):=[(I^{n+1},\partial I^{n+1},J^n),(X,A,x_0)]$.

$n=0$, π_1 non è gruppo
$n=1$, π_2 gruppo
$n\geq 2$ π_{n+1} gruppo abel.



Oss.: π_n è funtore,

$f:(X,A,x_0)\longrightarrow(Y,B,x_0)$ induce

$f_*:\pi_n(X,A,x_0)\longrightarrow\pi_n(X,B,x_0)$.

$j_*:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(X,A,x_0)$ è omo..

Data $h:(I^{n+1},\partial I^{n+1},J^n)\to(X,A,x_0)$ si restringe a $I^n\times\{1\}\simeq I^n$ e ho $\partial h:(I^n,\partial I^n)\to(A,x_0)$.

$\partial:\pi_{n+1}(X,A,x_0)\to\pi_n(A,x_0)$ è omo. per $n\geq 1$.

Lemma: $\exists$ iso. canonico $\pi_{n+1}(X,A,x_0)\simeq\pi_n(\Omega X,\Omega A,x_0)$.

Dim.: identifico $[(I^{n+1},\partial I^{n+1},J^n),(X,A,x_0)]$ con $[(I^{n+1}/J^n,\partial I^{n+1}/J^n,*),(X,A,x_0)]$.

$I^{n+1}/J^n=D^{n+1}$ pto base $(1,0,\dots,0)$, $\partial I^{n+1}/J^n=S^n$,

$S(I^{n+1}/J^n)\simeq I^{n+1}/J^n\wedge I/\partial I\simeq I^{n+2}/J^n\times I\cup I^{n+1}\times\partial I=$

$=I^{n+2}/J^{n+1}=D^{n+2}$ e quindi

$\pi_n(\Omega X,\Omega A,x_0)\simeq[(D^n,S^{n-1},x_0),(\Omega X,\Omega A,x_0)]\simeq$

$\simeq[(S(D^n),S(S^{n-1}),x_0),(X,A,x_0)]\simeq[(D^{n+1},S^n,x_0),(X,A,x_0)]\simeq$

$\simeq\pi_{n+1}(X,A,x_0)$. $\square$

Prop.: la succ.

$\dots\to\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(A,x_0)\to\dots\to$

$\to\pi_1(X,A,x_0)\to\pi_0(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_0(X,x_0)$ è esatta.

Dim.: basta dimostrarla negli ultimi tre termini e usare l'iso. del lemma.

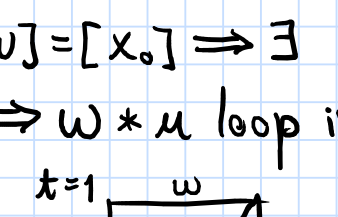
$$\pi_1(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\underset{1}{\pi_1(X,x_0)}\xrightarrow{j_*}\underset{2}{\pi_1(X,A,x_0)}\xrightarrow{\partial}\underset{3}{\pi_0(A,x_0)}\xrightarrow{i_*}\pi_0(X,x_0)$$

3 Se $a\in A$, è nella ccpa di x_0 $\underset{(i_*(a)=[x_0])}{}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\gamma: a\mapsto x_0$, $\partial[\gamma]=a$ $\underset{(a\in\mathrm{Im}\,\partial)}{}$.

2 Facile vedere che $\partial\cdot j_*=[x_0]$ (vero a livello di mappe).

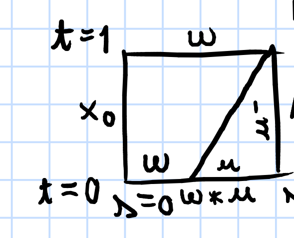
Sia $\omega:[0,1]\to X$ rapp. di un elem. in $\pi_1(X,A,x_0)$ con $\partial[\omega]=[x_0]\Rightarrow\exists$ cammino $\mu: I\to A$, $\mu(0)=\omega(1)$, $\mu(1)=x_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\omega*\mu$ loop in X basato in x_0.



$H_t(s)=\begin{cases}\omega\left(\frac{2s}{1+t}\right) & s\leq\frac{1+t}{2}\\ \mu(2s-1-t) & s\geq\frac{1+t}{2}.\end{cases}$

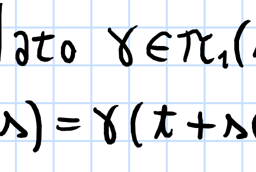
1 $j_*\circ i_*=0$, infatti dato $\gamma\in\pi_1(A,x_0)$



$H_t(s)=\gamma(t+s(1-t))$ è omotopia in $\pi_1(X,A,x_0)$ tra γ e x_0.

Esattezza in $\pi_1(X,x_0)$: $\gamma: I\to X$, $\gamma_{|\partial I}\equiv x_0$.

Se $j_*([\gamma])=0$ ho



che mi dà un'omotopia tra γ e σ, cioè $[\gamma]=i_*[\sigma]$. $\square$

Oss.: data $f:(X,A,x_0)\to(Y,B,y_0)$, f_* commuta con ∂ e con tutte le mappe della succ. esatta.

Oss.: tramite il mapping cylinder, $f: X\to Y$ a meno di omotopia è inclusione $X\hookrightarrow M_f\simeq Y$.

Teo.: se $p: E\to B$ è fibrazione di Serre, $B_0\subset B$, $E_0=p^{-1}(B_0)$, $b_0\in B$ pto base, $e_0\in E$ pto base, $p(e_0)=b_0$, p induce

$\pi_n(E,E_0,e_0)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B,B_0,b_0)$ iso..

Dim.: suriettività: $x\in\pi(B,B_0,b_0)$ dato da

$h:(I^n,\partial I^n,J^{n-1})\to(B,B_0,b_0)$. Posso sollevare h a

$H:(I^n,\partial I^n,J^{n-1})\to(E,E_0,e_0)$ con $H(J^{n-1})=e_0$ e $pH=h$

e ottengo $H(\partial I^n)\subset E_0$.

Iniettività: $x_0,x_1\in\pi_n(E,E_0,e_0)$ rappresentati da f_0,f_1 con $p_*x_0=p_*x_1$, significa che ho omotopia tra pf_0 e pf_1

$\phi_t:(I^n,\partial I^n,J^{n-1})\to(B,B_0,b_0)$, $\phi_0=pf_0$, $\phi_1=pf_1$ e sollevo

con valore iniziale su $T=\underbrace{I^n\times\partial I}_{f_0,f_1}\cup\underbrace{J^{n-1}\times I}_{e_0}$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "G"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n\times I \arrow[r, "\phi"] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

$G(u,t)=\begin{cases} f_t(u) & t=0,1\\ e_0 & \text{altrimenti}\end{cases}$

$T\subset\partial I^{n+1}$ è contraibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists H$ t.c. $H_{|T}=G$ e $pH=\phi$, omotopia tra f_0 e f_1. $\square$

Cor.: $E\xrightarrow{p}B$, $F=p^{-1}(b_0)$, $\pi_n(E,F,e_0)\xrightarrow{\simeq}\pi_n(B,b_0)$.

Cor. (succ. esatta lunga di omotopia):

$$\dots\to\pi_n(F,e_0)\to\pi_n(E,e_0)\to\underset{\underset{\pi_n(B,b_0)}{\wr}}{\pi_n(E,F,e_0)}\to\pi_{n-1}(F,e_0)\to\dots$$