Teo. (escissione in omotopia): $Y = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 aperti, $Y_0 = Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$,
$\pi_i(Y_1, Y_0, *) = 0 \ \forall\, 0 < i < p \ (p \geq 1)$
$\pi_i(Y_2, Y_0, *) = 0 \ \forall\, 0 < i < q \ (q \geq 1)$
$\forall * \in Y_0$. Allora $\iota: \pi_n(Y_2, Y_0, *) \to \pi_n(Y, Y_1, *)$ è suri. per $n = p+q-2$ e bigettiva per $1 \leq n < p+q-2$.
Dim.: no. $\square$

Applico il teo. a $S^n = E^n_+ \cup E^n_-$ (sono chiuse, ma basta prendere $S^n \setminus \{N\}$, $S^n \setminus \{S\}$), $E^n_+ \cap E^n_- = S^{n-1}$.

Teo.: 1) $\pi_i(S^n) = \pi_{i+1}(E^{n+1}_+, S^n)$ $\quad 0 < i,\ 0 \leq n$;
2) $\pi_i(S^n) = \pi_i(S^n, E^n_-)$ $\quad 0 < i,\ 1 \leq n$;
3) $\pi_i(S^n) = 0$ per $0 < i < n$.

Dim.: 1) successione esatta della coppia in omotopia:
$$\dots \to \underset{\substack{\| \text{ per } i \geq 0 \\ 0}}{\pi_{i+1}(E^{n+1}_+)} \to \pi_{i+1}(E^{n+1}_+, S^n) \to \pi_i(S^n) \to \underset{\substack{\| \text{ per } i>0 \\ 0}}{\pi_i(E^{n+1}_+)} \to \dots;$$
2) $$\dots \to \underset{\substack{\| \text{ per } i>0 \\ 0}}{\pi_i(E^n_-)} \to \pi_i(S^n) \to \pi_i(S^n, E^n_-) \to \underset{\substack{\| \text{ per } i>1 \\ 0}}{\pi_{i-1}(E^n_-)} \to \pi_{i-1}(S^n) \to \dots;$$
biettiva per $i=1$

3) induzione su n.
$\pi_i(S^n) = \pi_{i+1}(E^{n+1}_+, S^n) = 0$ per $i < n$
$n=1$ ok. $n \geq 1$:
$$\left.\begin{aligned} \pi_i(E^{n+1}_+, S^n) &= \pi_{i-1}(S^n) \quad i < n+1 \\ \pi_i(E^{n+1}_-, S^n) &= \pi_{i-1}(S^n) \quad i < n+1 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \text{escissione} \Rightarrow$$
$\Rightarrow \pi_i(E^{n+1}_+, S^n) \to \pi_i(S^{n+1}, E^{n+1}_-)$ è iso. per $i < 2n$ e suri. per $i = 2n$ $\Rightarrow n \geq 1$, $\pi_i(S^{n+1}) = 0$ per $i \leq n$. $\square$

Def.: sia (X, x_0) spazio puntato, considero la "<u>mappa di sospensione</u>"
$\Sigma: \pi_i(X, x_0) \to \pi_{i+1}(SX, x_0)$ definita tramite
$f: (S^i, *) \to (X, x_0) \rightsquigarrow Sf: (S^1 \wedge S^i, *) \to (SX, x_0)$.

Lemma: Σ è omomorfismo.
Dim.: $\underbrace{CX}_{\text{cono ridotto}} = I \wedge X = I \times X / _{I \times \{x_0\} \cup \{0\} \times X}$.
$$X \hookrightarrow CX, \quad x \mapsto [(1,x)], \qquad CX/X = SX.$$
Considero
$$\begin{tikzcd} & 0 = \pi_i(CX) \\ & \pi_i(X, x_0) \arrow[u] \arrow[r, "\Sigma"] & \pi_{i+1}(SX) \\ & \pi_{i+1}(CX, X) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] & \pi_{i+1}(CX/X, x_0) \arrow[u, phantom, "\wr"] \\ & 0 = \pi_{i+1}(CX) \arrow[u] \end{tikzcd}$$
$\square$

Teo. (iso. di Fraudenthal):
$\pi_i(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{i+1}(S^{n+1})$ è iso. per $i \leq 2n-2$ e suri. per $i = 2n-1$.
Dim.: identifico Σ con
$$\begin{tikzcd} \pi_i(S^n) & \pi_{i+1}(E^{n+1}_-, S^n) \arrow[l, "\text{iso. dalla succ. della coppia}"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\text{escissione}"] & \pi_{i+1}(E^{n+1}/S^n, *) \\ & \pi_{i+1}(S^{n+1}, E^{n+1}_+) \arrow[r, "\sim", "E^{n+1}_+ \text{ contraibile}"'] & \pi_{i+1}(S^{n+1}/E^{n+1}_+, *) \arrow[u, "\wr\ \text{(omeomorfismo)}"'] \end{tikzcd}$$
$U_2 = E^{n+1}_-$, $U_1 = E^{n+1}_+$, $U_1 \cap U_2 = S^n$,
$$\pi_i(U_2, U_1 \cap U_2) \to \pi_i(U_1 \cup U_2, U_1).$$
iso. per $i \leq 2n-1$, suri. per $i \leq 2n$
$\pi_i(U_2, U_1 \cap U_2) = \pi_i(E^{n+1}_-, S^n) = \pi_{i-1}(S^n) = 0$ per $i < n+1$
$\square$

Cor.: $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}\ \forall n$.
Dim.: $\mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \twoheadrightarrow \pi_2(S^2) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \dots$
$\pi_2(S^2)$ è infinito: $[S^2, S^2]^0 \to \mathrm{Hom}(H_2(S^2) \to H_2(S^2)) = \mathbb{Z}$,
basta prendere $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z \mapsto z^n$. $\square$

Omotopia di CW-c.

Def.: $i: A \to X$ ha la proprietà di estensione di omotopia (HEP) per Y se data $h: A \times I \to Y$ e $f: X \to Y$ t.c. $f \circ i(a) = h(a, 0)$ $\exists\, H: X \times I \to Y$ t.c. $H(x, 0) = f(x)$, $H(i(a), t) = h(a, t)$.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "e^0"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_0^A"'] & X \arrow[d, "i_0^X"] \arrow[ddr, bend left, "f"] \\ A \times I \arrow[r, "i \times id"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "H"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Def.: $i: A \to X$ t.c. ha la HEP $\forall\, Y$ si dice <u>cofibrazione</u>.

Per testare se una mappa i è una cofibrazione, uso il mapping cylinder M_i.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i_0^A"'] & X \arrow[d] \\ A \times I \arrow[r] & M_i = A \times I \sqcup X /_{(a,0) \sim i(a)} \end{tikzcd}$$
Date $f: X \to Y$ e $h: A \times I \to Y$ t.c. $h \circ i_0^A = f \circ i$, allora ho $\sigma: M_i \to Y$ che fa commutare.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[ddr, bend left, "f"] \\ A \times I \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "h"'] \arrow[ur, phantom, "X \times I"] & M_i \arrow[dr, "\sigma"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$
- Se $i: A \to X$ ha HEP per M_i, allora ha HEP per qualsiasi Y.
- Se $A \xrightarrow{i} X$ è cofibrazione, uso HEP per M_i e proprietà univ. del mapping cylinder ($\exists\, \sigma$), allora per $Y = X \times I$ ho $\rho\sigma = id_{M_i} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sigma$ inclusione e ρ retrazione.
- Se $\sigma: M_i \to X \times I$ ha retrazione $X \times I \to M_i$, allora ho HEP per M_i. Quindi

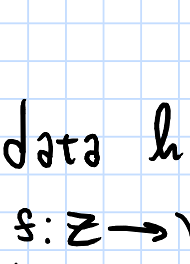
Teo.: sono equivalenti:
(1) $i: A \to X$ è cofibrazione;
(2) i ha HEP per M_i;
(3) $\sigma: M_i \to X \times I$ ha retrazione.

Fatto: $i: A \to X$ cofibrazione è embedding (ex.) e se X è Hausdorff $i(A)$ è chiuso in X (ex.).
Consideriamo solo cofibrazioni chiuse.

Def.: se $\{x\} \subset X$ è cofibrazione chiusa, dico che (X, x) è <u>ben puntato</u> e x è pto base <u>non degenere</u>.

Prop.: sia $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ inclusione chiusa. Allora i è cofibrazione $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$ ha retrazione.

Dim.: ($\Rightarrow$) uso HEP per $Y = X \times \{0\} \cup A \times I$.
($\Leftarrow$) considero $f: X \to Y$, $h: A \times I \to Y$,
$g: X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ data da
$g(x, 0) = f(x)$, $g(a, t) = h(a, t)$. g è continua e per dare $H: X \times I \to Y$ uso $X \times I \xrightarrow{r} X \times \{0\} \cup A \times I \xrightarrow{g} Y$. $\square$

Es.: $S^{n-1} \hookrightarrow E^n$ è cofibrazione:  (proietto da un pto opportuno).

Lemma: data $A \hookrightarrow X$ cofib., $g: A \to Y$, $Z = X \sqcup Y /_{a \sim g(a)}$.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "F"] & Z \end{tikzcd}$$
$F: Y \to Z$ è cofib..

Dim.:
$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[r, "i \times id"] \arrow[d, "g \times id"'] & X \times I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] \\ Y \times I \arrow[r, "F \times id"] \arrow[drr, bend right] & Z \times I \arrow[dr, dashed] \\ & & W \end{tikzcd}$$
data $h: Y \times I \to W$ e $f: Z \to W$ t.c. $h(y, 0) = fF(y)$ la composta $A \times I \to Y \times I \to W$ estende a $X \times I \to W$ perché i cofib. $\Rightarrow \exists\, Z \times I \to W$. $\square$

Cor.: X CW-c. $\Rightarrow X^n \hookrightarrow X$ cofib..
Dim.: $S^n \hookrightarrow E^{n+1}$ cofib.,
$$\begin{tikzcd} \sqcup S^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & \sqcup E^{n+1} \arrow[d] \\ X^n \arrow[r] & X^{n+1} \end{tikzcd}$$
, per il lemma $X^n \hookrightarrow X^{n+1}$ cofib., composizione di cofib. è cofib. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X^n \hookrightarrow X^m$, $m > n$ è cofib. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X^n \hookrightarrow X$ è cofib. perché estendo l'omotopia "uno scheletro alla volta" su $X = \bigcup X^m$. $\square$