Oss.: se X è CW-c., A sottocomplesso, (X,A) è una <u>coppia CW</u>;
$A \hookrightarrow X$ è cofib. (stessa dim.).

Def.: una coppia di spazi cpa (X,A) si dice <u>n-connessa</u> se
$\pi_i(X,A,x_0)=0 \ \forall\, 0\leq i\leq n$.

Lemma: $f:(E^i,S^{i-1},*)\longrightarrow(X,A,x_0)$ è banale in $\pi_i(X,A,x_0) \iff$
$\iff f$ è omotopa (relativamente a S^{i-1}) $g:E^i\to A$.
↳ "costante su"

Dim.: ($\Leftarrow$) se $f\sim g$ rel. S^{i-1}, $g(E^i)\subset A$, sia h l'omotopia. Pongo
$H:(E^i\times I, S^{i-1}\times I, *\times I)\longrightarrow (X,A,x_0)$,
$H(x,t)=\begin{cases} h(x,2t) & \text{se } 0\leq t\leq 1/2 \\ g((2-2t)x+(2t-1)x_0) & \text{se } \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$ è omotopia tra f e la costante.
($\Rightarrow$) Considero G l'omotopia tra f e la costante. Definisco
$H:E^i\times I\longrightarrow X$ con $H(x,t)=\begin{cases} G(\frac{2x}{2-t},t) & \text{se } 0\leq \|x\|\leq \frac{2-t}{2} \\ G(\frac{x}{\|x\|},2-2\|x\|) & \text{se } \frac{2-t}{2}\leq\|x\|\leq 1\end{cases}$. □

Cor.: 1) (X,A) è n-connessa $\iff \forall i\leq n\, \forall f:(E^i,S^{i-1})\to(X,A)$ è omotopa (rel. S^{i-1}) a $g:E^i\longrightarrow A$;
2) $X\supset A_1\supset A_2$, (X,A_1), (A_1,A_2) n-conn. $\Rightarrow (X,A_2)$ n-conn..

Dim.: lemma $\Longrightarrow$ 1) $\Longrightarrow$ 2). □

Es.: (E^n,S^{n-1}) è $(n-1)$-conn.: $\underset{\substack{\| \\ 0}}{\pi_{i+1}(E^n)}\to\pi_{i+1}(E^n,S^{n-1})\to\underset{\substack{\|\to i\leq n-2 \\ 0}}{\pi_i(S^{n-1})}\to\underset{\substack{\| \\ 0}}{\pi_i(E^n)}$

Prop.: X CW-c., (X,X^n) è n-conn..

Dim.: U_1 unione di dischi aperti, uno per ogni $(n+1)$-cella di X.
U_2 = ingrossamento di X^n in X^{n+1} ($X^{n+1}\setminus$ centri delle $(n+1)$-celle).
$U_1\cup U_2=X^{n+1}$ (ricoprimento aperto),
$(U_1,U_1\cap U_2)$ è omotopo a $\coprod_\alpha (E^{n+1}_\alpha,S^n_\alpha)$.
$\alpha\to$ varia nelle $(n+1)$-celle
$\pi_i(U_1,U_1\cap U_2)=0\ \forall i<n+1$ (dall'es. (E^n,S^{n-1})).

Applico escissione con $p=n+1$, $q=1$:
$\pi_i(X^{n+1},U_2)=\pi_i(X^{n+1},X^n) \underset{i\leq n}{\twoheadleftarrow} \underset{\substack{\| \ i\leq n \\ 0}}{\pi_i(U_1,U_1\cap U_2)} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (X^{n+1},X^n)$ è n-conn.. Dal cor. parte 2),
(X^{n+k},X^n) è n-conn., $X=\bigcup X^n$, $f:E^i\to X$, immagine di cpt è cpt; cpt $\subset$ # finito di celle $\Longrightarrow \exists k$ t.c. $f(E^i)\subset X^k \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \pi_i(X,X^n)=0\ \forall i\leq n$. □

<u>Approssimazione cellulare</u>

Teo. (appross. cellulare): una $f:X\to Y$ tra CW-c. è omotopa a una mappa cellulare.

Dim.: per induzione mostro che ho omotopie
$H^n: X\times I\to Y$ t.c.
a) $H^0_0=f$, $H^{n-1}_1=H^n_0$ per $n\geq 1$;
b) H^n è cost. su X^{n-1};
c) $H^n_1(X^i)\subset Y^i\ \forall i\leq n$.
Se $X=X^n$ per qualche n ok, altrimenti
$H(x,t)=\begin{cases} H^i(x,2^{i+1}(t-1+2^{-i})) & \text{se } 1-2^{-i}\leq t\leq 1-2^{-i-1} \\ H^i(x,1) & \text{se } x\in X^i,\ t=1\end{cases}$.
H continua su $X^i\times I \Longrightarrow$ continua su $X\times I$.
$n=0$: $\forall x\in X^0$ scelgo un cammino da $f(x)$ a $y^0\in Y^0$ nella stessa ccpa di $f(x)$.
Ho omotopia tra $f|_{X^0}$ e una mappa $X^0\to Y^0$, $X^0\hookrightarrow X$ cofib. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ posso estendere a $X \Rightarrow$ ho omotopia tra f e $\tilde f(X^0)\subset Y^0$.
$n>0$: suppongo $f(X^i)\subset Y^i$ per $i<n$, $\Phi_\alpha:(E^n_\alpha,S^{n-1}_\alpha)\to(X,X^{n-1})$ mappa di incollamento di una n-cella. $f\circ\Phi_\alpha:(E^n_\alpha,S^{n-1}_\alpha)\to(Y,Y^{n-1})\subset(Y,Y^n)$.
Poiché $\pi_n(Y,Y^n)=0$, $f\circ\Phi_\alpha$ è omotopa (rel. S^{n-1}_α) a una mappa $(E^n_\alpha,S^{n-1}_\alpha)\to(Y^n,Y^{n-1})$. Lo faccio per tutte le n-celle $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ho omotopia tra $f|_{X^n}$ e una mappa $X^n\to Y^n$.
Poiché $X^n\hookrightarrow X$ è cofib., estendo l'omotopia a $X\xrightarrow{\tilde f}Y$ t.c. $\tilde f|_{X^n}\subset Y^n$ e l'omotopia è cost. su X^{n-1}. □

Oss.: per Y abbiamo usato $\pi_n(Y,Y^n)=0$. Lo stesso argomento ci dà
Prop.: X CW-c., $f:X\to Y$ continua, $T\subset Y$ t.c. $\pi_i(Y,T)=0\ \forall i \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ omotopa a $g:X\to T$; se $X'\subset X$ è sottocomp. e $f(X')\subset T$, allora posso scegliere un'omotopia costante su X'.

Teo. (Whitehead): $f:X\to Y$ continua tra CW-c. t.c. induce iso.
$\pi_i(X,x_0)\xrightarrow{\simeq}\pi_i(Y,y_0)\ \forall i$, allora f è equiv. omotopica.

Oss.: non basta $\pi_i(X,x_0)\simeq\pi_i(Y,y_0)\ \forall i$.

Es.: $S^2\times\mathbb{RP}^3$, $S^3\times\mathbb{RP}^2$ hanno stessi π_i, diversi H_*.

Cor.: X CW-c. t.c. $\pi_i(X,x_0)=0\ \forall i \Rightarrow X$ contraibile.

Dim.: applico il teo. a $X\to\{x_0\}$. □

Dim. (del teo.): data $f:X\to Y$, considero $M_f=X\times I\cup Y/_{(x,1)\sim f(x)}$.
$\underset{x\,\longmapsto\,(x,0)}{X\hookrightarrow M_f}$ è inclusione, $M_f\xrightarrow{\simeq}Y$ con retrazione omotopa a id.
Lemma: f mappa cellulare $\Rightarrow M_f$ CW-c., $X\subset M_f$ sottocomplesso.
Dim.: $X\times I$ ha decomposizione cellulare con celle $e^i\times\{0\}$ i-cella, $e^i\times\{1\}$, i-cella, $e^i\times(0,1)$ $(i+1)$-cella al variare di e^i cella di X.
Struttura cellulare su M_f: induttivamente.
$n=0$ ok. Dato M_f^{n-1} attacco celle $e^n\times\{0\}$, $e^{n-1}\times(0,1)$ di $X\times I$ e celle di Y^n. Ottengo CW-c. perché i bordi si incollano bene. □
Per il lemma, posso supporre $f:X\hookrightarrow Y$ inclusione di sottocomplessi.
Succ. esatta lunga in omotopia:
$\to\pi_i(X,x_0)\xrightarrow{\simeq}\pi_i(Y,y_0)\to\underset{}{\overset{\substack{0 \\ \|\to\forall i}}{\pi_i(Y,X,*)}}\to\pi_{i-1}(X,x_0)\xrightarrow{\simeq} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow id_Y$ è omotopa a una mappa $Y\to X$ con omotopia costante su X, cioè X è retratto di deformazione di Y. □

Teo. (approssimazione CW): sia A CW-c., $k\geq -1$, Y s.t. e
$f:A\to Y$ t.c. $f_*:\pi_i(A,*)\to\pi_i(Y,*)$ è iso. per $i<k$, suri. per $i=k$.
Allora $\forall n>k$ (e $n=+\infty$) $\exists X$ CW-c. contenente A (come sottocomplesso) e $F:X\to Y$ che estende f t.c. $F_*:\pi_i(X,*)\to\pi_i(Y,*)$ è iso. per $i<n$, suri. per $i=n$. X è ottenuto da A incollando celle di dim. $k\leq d\leq n$.

Def.: $f:X\to Y$ è detta <u>equiv. omotopica debole</u> se induce
$\pi_i(X,*)\simeq\pi_i(Y,*)\ \forall i$.

Cor.: se Y è s.t. cpa, $\exists$ CW-c. X e $F:X\to Y$ t.c. F è equiv. omotop. debole.

Dim.: uso il teo. per $k=-1$, $A=*$. □

Prop.: un'appross. CW è unica a meno di omotopia. La mappa
$Y\longmapsto$ "classe di omotopia di appross. CW di Y" definisce un funtore $\{\text{spazi top.}\}\longrightarrow\{\text{CW-c. a meno di omotopia}\}$.

Dim.: siano $X_1\to Y_1$, $X_2\to Y_2$ appross. CW-c. e $g:Y_1\to Y_2$ continua.
Voglio costruire $f:X_1\to X_2$ t.c.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & X_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "g"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

commuta a meno di omotopia.
La prima parte segue da $Y_1=Y_2$, $g=id$ e Whitehead.
Ora, sostituisco $X_2\xrightarrow{\alpha_2}Y_2$ con $X_2\hookrightarrow M_{\alpha_2}$, WLOG

ho $X_2\hookrightarrow Y_2$ che induce $\pi_i(X_2)\xrightarrow{\simeq}\pi_i(Y_2)\ \forall i \Rightarrow (Y_2,X_2)$ è i-conn. $\forall i$, la composta $X_1\to Y_1\to Y_2$ è omotopa a $X_1\xrightarrow{f}X_2$ (segue da una prop.).
→ vedi tom Dieck pag. 215
Si può vedere (ex.) che due tali f sono sempre omotope. □