Dim. (di approssimazione CW): attaccheremo celle di dim $> k$. Questo non cambia π_i per $i < k$: infatti, data $\sigma: S^i \to X$ per appross. cell. è omotopa a $\sigma': S^i \to X^{(i)}$. Se ho omotopia tra σ, σ', questa è mappa tra

$\sigma \, \overset{*}{\underset{*}{\square}} \, \sigma'$ $\xrightarrow{\Sigma} X \overset{\text{appross. cell.}}{\Longrightarrow}$ Σ è omotopa rel. a ∂I^{i+1} a una mappa
I^{i+1}

$\underset{I^{i+1}}{\square} \longrightarrow X^{(i+1)}$.

$n=0$: se $f_*: \pi_0(A) \to \pi_0(Y)$ non è suri., aggiungo ad A un pto p_U per ogni ccpa U di Y non raggiunta da f e mando $F(p_U) \in U$.

$n=1$: Se $f_*: \pi_0(A) \to \pi_0(Y)$ è suri., ma non bigettiva, aggiungo 1-celle ad A per connettere le ccpa che vanno nelle stesse ccpa. Questo rende $f_*: \pi_0(A \cup \bigcup_\alpha D^1_\alpha) \to \pi_0(Y)$ bigettiva. Per ogni $[\gamma] \in \pi_1(Y, *)$, attacco una 1-cella a A e la mando tramite γ in Y ($f(*_A) = *_Y$).

$n \geq 2$: $f: A \to Y$ $(n-1)$-conn., WLOG (a meno di sostituire Y con M_f) f inclusione.
Scelgo $(\Phi_j, \varphi_j): (E^n, S^{n-1}) \to (Y, A, *)$ che generano $\pi_n(Y, A, *)$ come $\pi_1(A)$-modulo. Attacco una n-cella ad A tramite φ_j e ottengo X su cui estendo f tramite Φ_j sulla j-esima n-cella incollata. Ho $F: X \to Y$.
L'incollamento della j-esima n-cella rappresenta una classe $x_j \in \pi_n(X, A, *)$, $F_* x_j = y_j = (\Phi_j, \varphi_j)$. F induce mappa tra succ. esatte lunghe:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\pi_n(A) & \to & \pi_n(X) & \to & \pi_n(X, A) & \to & \pi_{n-1}(A) & \to & \pi_{n-1}(X) & \to & \pi_{n-1}(X, A) \overset{\text{per costruzione}}{=} 0 \\
\| & & ① \downarrow F_* & & \downarrow {\scriptstyle F_* \text{ suri. per costruzione}} & & \| & & \downarrow F_* ② & & \\
\pi_n(A) & \to & \pi_n(Y) & \to & \pi_n(Y, A) & \to & \pi_{n-1}(A) & \overset{\text{suri. per ipotesi}}{\twoheadrightarrow} & \pi_{n-1}(Y) & \to & 0
\end{array}$$

① è suri., ② è ini.. $\square$

Prop.: se $f: X \to Y$ è equiv. omotop. debole, f_* è iso. in H_i $\forall i$.
Dim.: WLOG f inclusione. Per $n \geq 0$ definisco il sottocomplesso $C_\cdot^{(n,A)}(X) \subset C_\cdot(X)$. $C_i^{(n,A)}(X)$ è generato da i-simplessi $\sigma: \Delta^i \to X$ t.c. tutte le facce di Δ^i di dim $\leq n$ vanno in A. È sottocomplesso.
Fatto: se (X, A) è $(n-1)$-conn., allora $C_\cdot^{(n,A)}(X) \hookrightarrow C_\cdot(X)$ è equiv. omotop. di catene (posso costruire esplicitamente l'omotopia).
L'ipotesi della prop. mi dice (Y, X) n-conn. $\forall n \Rightarrow$
$\Rightarrow H_i(Y) = H_i(C_\cdot^{(n,X)}(Y))$ $\forall i, n$. Per costruzione, se $i < n$ $C_i^{(n,X)}(Y) = C_i(X) \Rightarrow$ tesi per arbitrarietà di n. $\square$

Quindi, dato Y s.t. posso costruire X CW-c. t.c. $X \xrightarrow{f} Y$ induce iso. in π_* e H_*.

Caso particolare di appross. CW-c.:
Teo.: Y CW-c. t.c. $\pi_i(Y) = 0$ $\forall i \leq n \Rightarrow Y$ è omotop. equiv. a CW-c. X con $X^n = \{*\}$. Dim.: dalla dim. di prima. $\square$

occhio a $i=0$

Teo. (Hurewicz): X s.t. cpa. C'è omo. funtoriale $\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{h_n} H_n(X)$. Se X è $(n-1)$-conn., h_n è iso. (eccezione: $n=1$ è abelianizzazione) e $\tilde{H}_i(X) = 0$ $\forall i < n$.

Dim.: $n=1$ già visto. $n \geq 2$: so che equiv. omotop. debole induce iso. in π_* e $H_* \Rightarrow$ WLOG X CW-c.. X $(n-1)$-conn. $\overset{\text{teo. sopra}}{\Longrightarrow} X^{n-1} = \{*\}$.
$X^{n+1} \subset X$ induce iso. $\pi_n(X^{n+1}) \to \pi_n(X)$ (uso. appross. cell.) e ho $H_n(X^{n+1}) \simeq H_n(X)$. Quindi mi basta il caso $X = X^{n+1}$, $X^{n-1} = \{*\}$.
$X \underset{\text{WLOG}}{=}$ mapping cone di $\varphi: \underset{\bigvee_j S^n_j}{\overset{\|}{A}} \to \underset{\bigvee_k S^n_k}{\overset{\|}{B}}$. Se $X = S^n$ il teo. vale:

$\pi_n(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Per naturalità e additività, vale se $X = \bigvee_k S^n_k$. Lemma: $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha) = \bigoplus_\alpha \pi_n(S^n_\alpha)$ generato da $S^n_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha S^n_\alpha$ $(n>1)$.
Dim.: se $\#$ n-celle finito, $\bigvee_\alpha S^n_\alpha \subset \prod_\alpha S^n_\alpha$ e ne è l'n-scheletro. È anche $(n>1)$ l'$(n+1)$-scheletro $\Rightarrow (\prod_\alpha S^n_\alpha, \bigvee_\alpha S^n_\alpha)$ è $(2n-1)$-conn. $\Rightarrow$ l'inclusione induce iso..
In generale, $\Phi: \bigoplus_\alpha \pi_n(S^n_\alpha) \to \pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$ indotta da $S^n_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha S^n_\alpha$. È suri. (usi che immagine di cpt è cpt). $\square$

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_n(A) & \to & \pi_n(B) & \to & \pi_n(X) & \to & 0 \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\
H_n(A) & \to & H_n(B) & \to & H_n(X) & \to & 0
\end{array}$$

il diagramma vale per escissione. $\square$

Cor.: X semplicemente connesso, $\tilde{H}_i(X) = 0$ $\forall i < n \Rightarrow \pi_i(X, *) = 0$ $\forall i < n$, $\pi_n(X, *) = H_n(X)$.