Teo.: Sia (X,A) coppia di CW-c. semplicemente connessi, $H_i(X,A)=0$ per $i<n$ $(n\geq 2)$.
Allora $\pi_i(X,A)=0$ per $i<n$ e $h:\pi_n(X,A)\to H_n(X,A)$ è iso..

Dim.: se A è semplicemente connesso, per induzione su n suppongo $\pi_i(X,A)=0$ per $i<n \Rightarrow \pi_n(X,A)\to\pi_n(X/A)$ è iso. (escissione).
Per Van Kampen, $\pi_1(X/A)=0$. Da $H_i(X,A)\simeq\widetilde{H}_i(X/A)$, vedi video e elearning
$\pi_i(X/A)=0\ \forall i<n$. $n=2$:

$$\begin{tikzcd} \pi_2(X,A) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "h"] & \pi_2(X/A) \arrow[d, "\wr\, h_2"] \\ H_2(X,A) \arrow[r, "\simeq"] & H_2(X/A) \end{tikzcd} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h:\pi_2(X,A)\xrightarrow{\simeq}H_2(X,A)$. Concludo per induzione. □

Invariante di Hopf

Voglio costruire $f:S^{2n-1}\to S^n$ non banale in omotopia (n pari) di ordine infinito.

Teo. (Serre): $\pi_m(S^n)=\begin{cases} 0 & m<n \\ \mathbb{Z} & m=n \\ \mathbb{Z}\oplus \text{grp abel. finito} & n \text{ pari}, m=2n-1 \\ \text{grp abel. finito} & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Dim.: no. □

Per mostrare che tale classe non è banale, mostriamo un invariante $H:\pi_{2n-1}(S^n)\to\mathbb{Z}$. Mostreremo che se n è pari l'immagine è infinita.

Data $f:X\to Y$, considero $C_f=Y\sqcup CX/_{(x,1)\sim f(x)}$.
$j:Y\hookrightarrow C_f$ inclusione. Se $X=S^n$, Y CW-c., $f:S^n\to Y$ cellulare, allora C_f è il risultato di incollamento di $(n+1)$-celle E^{n+1} a Y tramite $f:\partial E^{n+1}\to Y$.

Prop.: le mappe $X\xrightarrow{f}Y$, $j:Y\to C_f$ inducono succ. esatta lunga
$H^0(Y)\to H^0(X)\to H^1(C_f)\to H^1(Y)\to\dots\to H^{i-1}(X)\to H^i(C_f)\xrightarrow{j^*}H^i(Y)\xrightarrow{f^*}\dots$
$f_0,f_1:X\to Y$ omotope $\Rightarrow$ l'omotopia induce succ. esatta lunga isomorfa.

Dim.: M_f, $X\simeq X\times\{0\}\hookrightarrow M_f \hookleftarrow Y$ ↳ equiv. omotopica

La succ. di coppia mi dà
$H^{i-1}(X)\to H^i(M_f,X)\to \underset{H^i(Y)}{\overset{}{H^i(M_f)}}\to H^i(X)$, con $H^i(M_f)\cong H^i(Y)$,

per escissione $M_f\xrightarrow{p}C_f$ induce $H^i(C_f,*)\xrightarrow{p^*}H^i(M_f,X)$, con $H^i(C_f,*)=\widetilde{H}_i(C_f)$.

p^* è iso.: $X\times\{0\}$ in M_f è retratto di $\overline{X}=X\times[0,1/2)$.
Uso $\overline{X}=X\times[0,1/2)$, $\overline{C}=p(\overline{X})\subset C_f$ e ho

$$\begin{tikzcd} H^i(M_f,X) & H^i(M_f,\overline{X}) \arrow[l, "\simeq"', "\text{retratto}"] \arrow[r, "\text{esci.}", "\simeq"'] & H^i(M_f\setminus X,\overline{X}\setminus X) \\ H^i(C_f,*) \arrow[u, "p^*"] & H^i(C_f,\overline{C}) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\text{esci.}", "\simeq"'] \arrow[u, "p^*"] & H^i(C_f\setminus\{*\},\overline{C}\setminus\{*\}) \arrow[u, "\wr"] \end{tikzcd}$$

Se $f_0\sim f_1$ tramite h,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f_0"] & X\times I \arrow[d, "h"] & X \arrow[l, "i_1"'] \arrow[d, "f_1"] \\ Y \arrow[r, "id"] & Y & Y \arrow[l, "id"'] \end{tikzcd}$$

induce iso. di succ. esatte perché i_0 e i_1 sono equiv. omotop.. □

Costruisco H invariante di Hopf. Fissiamo dei generatori $x\in H^{2n-1}(S^{2n-1},\mathbb{Z})$, $y\in H^n(S^n,\mathbb{Z})$. Sia $f:\underset{X}{S^{2n-1}}\to\underset{Y}{S^n}$, considero C_f. La succ. di prima mi dà

$$\underset{0}{H^{2n-1}(S^n)}\to\underset{\mathbb{Z}}{H^{2n-1}(S^{2n-1})}\xrightarrow[\simeq]{\partial}\underset{\mathbb{Z}}{H^{2n}(C_f)}\to\underset{0}{H^{2n}(S^n)}$$

$$\underset{0}{H^{n-1}(S^{2n-1})}\to\underset{\mathbb{Z}}{H^n(C_f)}\xrightarrow[\simeq]{j^*}\underset{\mathbb{Z}}{H^n(S^n)}\to\underset{0}{H^n(S^{2n-1})}$$

$\beta=\partial x\in H^{2n}(C_f)$, $\alpha=(j^*)^{-1}(y)\in H^n(C_f)$,
$\alpha\cup\alpha=:H(f)\beta$.

Oss.: se $g:S^n\to S^n$ di grado m, $H(g\circ f)=m^2H(f)$; se $g':S^{2n-1}\to S^{2n-1}$ di grado m', $H(f\circ g)=m'H(f)$.
n dispari $\Rightarrow \alpha\cup\alpha=0\Rightarrow H(f)=0$.

Prop.: se n è pari, $\exists f:S^{2n-1}\to S^n$ t.c. t.c. $H(f)=\pm 2$.

Dim.: considero $S^n\times S^n\supset(S^n\times\{*\})\cup(\{*\}\times S^n)=S^n\vee S^n$.
$S^n\vee S^n$ è il $(2n-1)$-scheletro di $S^n\times S^n\Rightarrow$
$\Rightarrow S^n\times S^n=(S^n\vee S^n)\cup(2n\text{-cella})$, ↳ tramite $g:S^{2n-1}\to S^n\vee S^n$
ho $h:S^n\vee S^n\to S^n$, $(x,*)\mapsto x$, $(*,x)\mapsto x$, $f=h\circ g$, $[f]\in\pi_{2n-1}(S^n)$.

$C_g=S^n\times S^n$, $H^n(S^n\times S^n)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} = H^n(S^n)\otimes H^0(S^n)\oplus H^0(S^n)\otimes H^n(S^n)$ generato da $y\otimes 1$, $1\otimes y$. $(y\otimes 1)\cup(1\otimes y)=y\otimes y\in H^{2n}(S^n\times S^n)=\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} H^n(S^n\vee S^n) & H^n(S^n\times S^n) \arrow[l, "j_g^*"'] & H^{n-1}(S^{2n-1})=0 \arrow[l, "\partial_g"'] \\ H^n(S^n) \arrow[u, "h^*"] & H^n(C_f) \arrow[l, "j_f^*"'] \arrow[u, "\tilde{h}^*"] & H^{n-1}(S^{2n-1})=0 \arrow[l, "\partial_f"'] \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

(con $H^n(S^n\times S^n)=C_g$)

$\tilde{h}^*(j_f^*)^{-1}(y)=(j_g^*)^{-1}(h^*)(y)=(j_g^*)^{-1}((y,0)+(0,y))=$
$=(y\otimes 1)+(1\otimes y)$.

$H(f)\partial_f(x)=(j_f^*)^{-1}(y)\cup(j_f^*)^{-1}(y)\in H^{2n}(C_f)$.
$\tilde{h}^*:H^{2n}(C_f)\to H^{2n}(C_g)$ è omo. $\Rightarrow$
$\Rightarrow H(f)\tilde{h}^*\partial_f(x)=\tilde{h}^*(j_f^*)^{-1}(y)\cup\tilde{h}^*(j_f^*)^{-1}(y)=$
$=((y\otimes 1)+(1\otimes y))\cup((y\otimes 1)+(1\otimes y))=2(y\otimes y)$.

$H^{2n}(C_f)\xleftarrow{\partial_f}H^{2n-1}(S^{2n-1})\xrightarrow{\partial_g}H^n(C_g)$,
$\partial_g\circ\partial_f^{-1}=\tilde{h}^*$ perché

$$\begin{tikzcd} 0=H^{2n-1}(S^n\vee S^n) \arrow[r] & H^{2n-1}(S^{2n-1}) \arrow[r, "\partial_g", "\simeq"'] & H^{2n}(\underset{}{C_g}) \arrow[r] & H^{2n}(S^n\vee S^n)=0 \\ 0=H^{2n-1}(S^n) \arrow[r] \arrow[u, "h^*"] & H^{2n-1}(S^{2n-1}) \arrow[r, "\partial_f", "\simeq"'] \arrow[u, "\wr\ id"] & H^{2n}(C_f) \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{h}^*"] & H^{2n}(S^n)=0 \arrow[u, "h^*"] \end{tikzcd}$$

(con $C_g=S^n\times S^n$)

Quindi se x genera $H^{2n-1}(S^{2n-1})$, $y\otimes y$ genera $H^{2n}(S^n\times S^n)$, allora
$\tilde{h}^*\partial_f(x)=\partial_g(x)=\pm y\otimes y\Rightarrow H(f)=\pm 2$. □

Cor.: $\pi_{2n-1}(S^n)$ è infinito per n pari.

Dim.: uso la f della prop. e $g:S^{2n-1}\to S^{2n-1}$ di grado $m\Rightarrow$
$\Rightarrow H(f\circ g)=\pm 2m$. □

Oss. (vedi Hatcher): H è omo..

Es.: $S^3\subset\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$. $S^3\xrightarrow{\varphi}S^2=\mathbb{CP}^1$ è una fibrazione con fibra S^1: $S^1\to S^3\to S^2$. Per $n>2$,
$0=\pi_n(S^1)\to\pi_n(S^3)\xrightarrow{\simeq}\pi_n(S^2)\to\pi_{n-1}(S^1)=0$.

Ex.: $\varphi:S^3\to S^2$ ha invariante di Hopf 1. Hint: $C_\varphi=\mathbb{CP}^2$.

Analogamente, $\psi:\underset{\mathbb{H}^2}{\underset{\cap}{S^7}}\to\underset{\mathbb{PH}}{\underset{\cap}{S^4}}$ con fibra $S^3\subset\mathbb{H}$. $C_\psi=\mathbb{PH}^2$, $H(\psi)=1$.

Con ottetti di Cayley: $S^7\to S^{15}\xrightarrow{\xi}S^8$, $H(\xi)=1$.

Fatto: $\nexists f:S^{2n-1}\to S^{2n}$, $n\neq 2,4,8$ con $H(f)=1$.