Quando una varietà complessa è algebrica?

varietà complessa: s.t. M (connesso, cpt) loc. omeo. a $\mathbb{C}^n$ + funzioni olo. (su $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}P^n$ la topologia euclidea)

algebrica: X luogo di zeri in $\mathbb{P}^n$ di pol. omogenei

è: $\exists\, f: M \to X$ <u>biolomorfa</u>

Chow: le sottovarietà complesse di $\mathbb{P}^n$ sono algebriche.

Quando si può immergere M in $\mathbb{P}^n$?
(tramite $f: M \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ ini. con immagine una sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^n$)

Oss.: M NON si immerge in $\mathbb{C}^n$ eccetto $M = \{pto\}$.

le $f: M \to \mathbb{P}^n$ olo. $\longleftrightarrow$ certi fibrati vettoriali complessi su M (olomorfi, di rango 1) line bundles

In realtà, un line bundle dà $f: U \to \mathbb{P}^n$ olo., $U \subseteq M$ aperto.

Quando $\exists$ su M un line bundle t.c. la mappa associata è definita su tutto M e dà un'immersione?

La mappa di un line bunde dà un'immersione se certe coomologie a valori in certi fasci si annullano.

Teo. (Kodaira vanishing): criterio di annullamento per tali coomologie.

Teo. (Kodaira embedding): X varietà complessa cpt è immergibile in $\mathbb{P}^n \iff \exists$ su M una $(1,1)$-forma razionale, chiusa, positiva.

Argomenti:

- fasci, prefasci, loro coomologie
- funzioni olo. in più variabili complesse (risultati locali)
- varietà complesse, sottovarietà complesse e analitiche
- fibrati vettoriali complessi olomorfi
- immersioni proiettive
- forme differenziali su varietà complesse
- teoria di Hodge
- varietà di Kähler
- teoremi di Kodaira

——— ○ ——— ○ ———

Fasci di insiemi

Es. base: fascio dei germi di applicazioni.

Def.: X s.t., Y insieme, $p \in X$. La SPIGA dei germi in p delle applicazioni da X a Y è

$$(\mathfrak{F}_{X,Y})_p = \{(U,f) \mid \emptyset \neq U \subseteq X \text{ aperto}, p \in U, f: U \to Y\}/\sim_p \quad \text{dove}$$

$(U,f) \sim_p (V,g) \iff \exists\, W \subseteq U \cap V$ aperto, $p \in W$ t.c. $f_{|W} = g_{|W}$.

$[(U,f)]_{\sim_p} = f_p$ è il GERME di f in p (f, g a valori in Y def. loc. in p, $f_p = g_p \iff f \equiv g$ su un intorno aperto di p).

$\mathfrak{F}_{X,Y} = \bigcup_{p \in X} (\mathfrak{F}_{X,Y})_p$ è il FASCIO dei germi delle applicazioni da X a Y.

$\pi: \mathfrak{F}_{X,Y} \to X$ suri., $\pi((\mathfrak{F}_{X,Y})_p) = \{p\}$ è la PROIEZIONE del fascio.

$p \in X$, $\pi^{-1}(p) = (\mathfrak{F}_{X,Y})_p$, cioè spighe = fibre di π.

$\emptyset \neq U \subseteq X$ aperto, $f: U \to Y$. Poniamo $\mathcal{A}_{U,f} = \bigcup_{p \in U} \{f_p\}$.

$\pi(\mathcal{A}_{U,f}) = U$, $\pi_{|\mathcal{A}_{U,f}}$ è biunivoca.

Su $\mathfrak{F}_{X,Y}$ mettiamo la topologia data dalla base di aperti $\mathcal{A}_{U,f}$ al variare di $\emptyset \neq U \subseteq X$ aperto e $f: U \to Y$.

$z \in \mathfrak{F}_{X,Y}$, $\underset{f_{\pi(z)}}{\overset{\shortparallel}{z}} = [(U,f)]_{\sim_{\pi(z)}} \Rightarrow z \in \mathcal{A}_{U,f}$.

$\mathcal{A}_{U,f} \cap \mathcal{A}_{V,g} \neq \emptyset$, $W = \{x \in U \cap V \mid f_x = g_x\}$ aperto di X,
$h = f_{|W} = g_{|W} \Rightarrow \mathcal{A}_{U,f} \cap \mathcal{A}_{V,g} = \mathcal{A}_{W,h}$.

Con questa topologia, le spighe ereditano la topologia discreta e π diventa (ex.) un omeo. locale.

Def.: $\pi: Z \to X$ tra s.t. è un OMEOMORFISMO LOCALE se $\forall\, z \in Z$ $\exists\, A \subseteq Z$ aperto, $z \in A$ t.c. $\pi(A)$ è aperto in X e $\pi_{|A}: A \to \pi(A)$ è un omeo..

Un omeo. locale è continuo e aperto. Inoltre, gli aperti della def. danno una base della topologia di Z.

$V \subseteq X$ aperto, $p \in \pi^{-1}(V)$. Sia $A \subseteq Z$ aperto, $p \in A$ t.c. $\pi_{|A}: A \to \pi(A)$ è omeo. e $\pi(A) \cap V$ è aperto in X e in $\pi(A)$.

$(\pi_{|A})^{-1}(\pi(A) \cap V)$ è aperto in $A \Rightarrow$ aperto in Z, contiene p ed è contenuto in $\pi^{-1}(V) \Rightarrow \pi^{-1}(V)$ aperto.

Se Y è s.t. $\rightsquigarrow \mathcal{C}^0_{X,Y}$ fascio dei germi delle applicazioni continue da X a Y.

X, Y var. diff. $\rightsquigarrow \mathcal{C}^\infty_{X,Y}$ " " " " " C^∞ " " " ".

X, Y var. comp. $\rightsquigarrow \mathcal{O}_{X,Y}$ " " " " " olo. " " " ".

Se $Y = \mathbb{C}$ scriviamo $\mathcal{C}^0_X$, $\mathcal{C}^\infty_X$, $\mathcal{O}_X$.

Data $F: Y \twoheadrightarrow X$ suri. usiamo le $f: U \to Y$ t.c. $F \circ f = id_U \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \underset{(\Gamma_Y)}{\Gamma_F}$ è il fascio dei germi delle sezioni di F.

In generale, si prendono le f con la stessa regolarità di F.

Def.: $\emptyset \neq U \subseteq X$ aperto, una SEZIONE di $\mathfrak{F}_{X,Y}$ su U è $\sigma: U \to \mathfrak{F}_{X,Y}$ continua t.c. $\pi \circ \sigma = id_U$.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{F}_{X,Y} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

L'insieme delle sezioni di $\mathfrak{F}_{X,Y}$ su U è $\Gamma(U, \mathfrak{F}_{X,Y})$.

$\sigma \in \Gamma(U, \mathfrak{F}_{X,Y})$, $p \in U$, $\sigma(p) \in (\mathfrak{F}_{X,Y})_p$. $\exists\, W_p \subseteq U$ aperto, $p \in W_p$ e $\exists\, f^{(p)}: W_p \to Y$ t.c. $\sigma(p) = [(W_p, f^{(p)})]_{\sim_p} = f^{(p)}_p$.

Sull'aperto $\mathcal{A}_{W_p, f^{(p)}}$ π è invertibile. Sull'aperto $\underset{p}{\overset{}{\sigma^{-1}(\mathcal{A}_{W_p, f^{(p)}})}} \subseteq W_p$, $\sigma \equiv (\pi_{|\mathcal{A}_{W_p, f^{(p)}}})^{-1} \Rightarrow \forall\, q \in \sigma^{-1}(\mathcal{A}_{W_p, f^{(p)}})$, $\sigma(q) \equiv f^{(p)}_q$.

Quindi $\exists$ ricoprimento aperto di U, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e $\forall\, \alpha \in I$ $f_\alpha: U \to Y$ t.c. $\forall\, p \in U_\alpha$, $\sigma(p) = (f_\alpha)_p$.

$\alpha, \beta \in I$ t.c. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. $q \in U_\alpha \cap U_\beta$, $(f_\alpha)_q = \sigma(q) = (f_\beta)_q \Rightarrow$
$\Rightarrow f_\alpha(q) = f_\beta(q)$, cioè $f_{\alpha|U_\alpha \cap U_\beta} = f_{\beta|U_\alpha \cap U_\beta} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, F: U \to Y$ t.c. $\forall\, \alpha \in I$, $F_{|U_\alpha} = f_\alpha$. $\sigma(p) = F_p$ $\forall\, p \in U$.

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathfrak{F}_{X,Y}) &\longrightarrow F_{X,Y}(U) = \{f: U \to Y\} \\ \sigma &\longmapsto F \end{aligned}$$
è biunivoca. (inversa $F \mapsto \sigma: U \to \mathfrak{F}_{X,Y}$, $\sigma(p) = F_p$)

$\operatorname{Im} \sigma = \mathcal{A}_{U,F}$.

Oss.: le spighe $(\mathfrak{F}_{X,Y})_p = \underset{\substack{U \subseteq X \\ \text{aperto}, \\ p \in U}}{\varinjlim} F_{X,Y}(U)$. (limite diretto)

$\Gamma_\pi \cong \mathfrak{F}_{X,Y}$ (come fasci).

Def.: un FASCIO DI INSIEMI su X s.t. è una coppia $(\mathcal{S}, \pi)$, $\mathcal{S}$ s.t., $\pi: \mathcal{S} \twoheadrightarrow X$ <u>omeo. locale suri.</u>. X base del fascio, $\mathcal{S}$ spazio totale, π proiezione, $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ è la spiga su x, i suoi elementi sono i GERMI.

Es.: un rivestimento $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio. Se il riv. ha almeno 2 fogli, sia $C \subset \mathcal{S}$ chiuso t.c. $\pi_{|C}$ è ini., allora $\mathcal{S} \setminus C$ è un fascio su X.

$\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{2\pi i z}$ riv. $\Rightarrow$ fascio, spighe $\mathbb{Z}$;

$\exp_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to S^1$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ " , " .

Es.: M con la topologia discreta, $X \times M \xrightarrow{\pi_1} X$ è un fascio, il fascio costante a spiga M (si indica con M): $x \in X$, $\pi_1^{-1}(x) = \{x\} \times M$.

Es.: fissiamo $x_0 \in X$ un pto chiuso, $\mathcal{S} = X \times M/\sim$ con $(x_1, m_1) \sim (x_2, m_2) \iff x_1 = x_2 \neq x_0$. Si chiama fascio grattacielo a supporto in x_0 e spiga M (si indica con M_{x_0}).