$\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$ fascio. (omeo. loc. suri.):

- $\pi$ è continua e aperta;
- $x \in X$, la spiga $\pi^{-1}(x) = \mathcal{S}_x$ eredita la top. discreta;
- $\mathcal{S}_x$ chiusa in $\mathcal{S} \iff x$ chiuso in $X$ $(\pi(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_x) = X \setminus \{x\}$, $\pi^{-1}(X \setminus \{x\}) = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_x)$.

Def.: $(\mathcal{S}, \pi)$, $(\mathcal{S}', \pi')$ fasci su $X$, un MORFISMO di fasci su $X$ è $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ continua t.c. $\pi' \circ F = \pi$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{S}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\forall x \in X$, $F(\mathcal{S}_x) \subset \mathcal{S}'_x$, $\underset{F_{|\mathcal{S}_x}}{\overset{\shortparallel}{F_x}} : \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}'_x$.

È ISOMORFISMO di fasci se è biunivoca $\iff$ tutte le $F_x$ lo sono.

Oss.: loc. $F = \pi'^{-1} \circ \pi \Rightarrow F$ omeo. loc. $\Rightarrow$ aperto.

Def.: $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ è un SOTTOFASCIO se è aperto e $\pi_{|\mathcal{S}'} : \mathcal{S}' \to X$ è suri. ( $(\mathcal{S}', \pi_{|\mathcal{S}'})$ fascio su $X$).

- $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ morfismo di fasci su $X \Rightarrow \mathrm{Im}\, F$ sottofascio di $\mathcal{S}'$;
- $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ sottofascio $\Rightarrow i : \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{S}$ morfismo di fasci su $X$.

Def.: $Y \subset X$, $(\mathcal{S}, \pi)$ fascio su $X$, la RESTRIZIONE di $\mathcal{S}$ a $Y$ è $\mathcal{S}_{|Y}$, $\pi^{-1}(Y)$ con proiezione $\pi_{|\pi^{-1}(Y)}$.

Es.: - $Y$ riv., $U \subset Y$ chiuso, $Y \setminus U$ è sottofascio di $Y$;

- $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to S^1$, $\theta \mapsto e^{2\pi i \theta}$ è $\exp_{|S^1}$ con $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{2\pi i z}$;
- $M \to M_{x_0}$ è un morfismo di fasci su $X$.

Def.: $(\mathcal{S}, \pi)$ fascio su $X$, $\emptyset \neq U \subset X$ aperto, $\sigma : U \to \mathcal{S}$ SEZIONE di $\mathcal{S}$ su $U$ se è continua e $\pi \circ \sigma = id_U$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

$\forall x \in U$, $\sigma(x) \in \mathcal{S}_x$.

L'insieme delle sezioni di $\mathcal{S}$ su $U$ è $\Gamma(U, \mathcal{S})$ $(\Gamma(\emptyset, \mathcal{S}) = \emptyset)$.

Le sezioni sono ini. e omeo. loc. ($x \in X$, $\sigma(x) \in V$ aperto della def. di omeo. loc. per $\pi$, su $\sigma^{-1}(V)$ $\sigma \equiv (\pi_{|V})^{-1}$).

Ogni $s \in \mathcal{S}$ è immagine di una sezione e le immagini delle sezioni danno una base della top. di $\mathcal{S}$.

$F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ morfismo di fasci su $X$, $\forall \emptyset \neq U \subseteq X$ aperto ho

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{S}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ U \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, hook] & & X & \end{tikzcd}$$

$$F_U : \Gamma(U, \mathcal{S}) \to \Gamma(U, \mathcal{S}'). \quad \sigma \mapsto F \circ \sigma$$

Es.: - $\exp_{|S^1} : \mathbb{R} \to S^1$, $\theta \mapsto e^{2\pi i \theta}$, $\Gamma(S^1, \exp_{|S^1}) = \emptyset$; se $\emptyset \neq U \subsetneq S^1$ aperto connesso, $\Gamma(U, \exp_{|S^1}) = \mathbb{Z}$.

- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{2\pi i z}$, le sezioni sono determinazioni di $\frac{1}{2\pi i} \log z$.

Serve $\overset{\emptyset}{\overset{\shortparallel}{U}} \subset \mathbb{C}$ aperto connesso t.c. $i : U \hookrightarrow \mathbb{C}^*$, $i_*(\pi_1(U)) = \{0\} \subset \pi_1(\mathbb{C}^*)$, allora $\Gamma(U, \exp) = \mathbb{Z}$.

- fascio costante $M$ su $X$, $\emptyset \neq U \subset X$ aperto connesso, $\Gamma(U, M) = M$.

In generale, $\Gamma(U, M) = \{f : U \to M \text{ cont. loc. cost.}\}$

$(\underset{\text{prodotto}}{=} \underset{\substack{cc \\ \text{di } U}}{\times} M$ se le cc di $U$ sono aperte).

- Per il fascio grattacielo $M_{x_0}$, $\emptyset \neq U \subset X$ aperto,

$$\Gamma(U, M_{x_0}) = \begin{cases} \{pto\} & \text{se } x_0 \notin U \\ M & \text{se } x_0 \in U \ (\sigma \mapsto \sigma(x_0) \in M). \end{cases}$$

$\mathcal{S}$ fascio su $X$, $\emptyset \neq U \subset X$ aperto, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathcal{S})$,

$Z_{\sigma_1, \sigma_2} = \{x \in U \mid \sigma_1(x) = \sigma_2(x)\}$ è aperto (in $U$ o in $X$).

Se $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) = y \in \mathcal{S}_x$, $V$ intorno di $y$ su cui $\pi(V)$ è omeo. con $\pi(V)$ aperto, su $\sigma_1^{-1}(V) \cap \sigma_2^{-1}(V) \ni x$ aperto si ha $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ $(\equiv (\pi_{|V})^{-1})$.

Se $\mathcal{S}$ è Hausdorff, $Z_{\sigma_1, \sigma_2}$ è chiuso $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, vale il principio di identità per sezioni di $\mathcal{S}$:

se $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ e $\exists x \in V$ t.c. $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \Rightarrow \sigma_1 \equiv \sigma_2$ sulla cc di $x$ in $U$.

Oss.: $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}$, ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont. dà una sezione di $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}$, $\sigma(x) = f_x$.

$f_1 = 0$, $f_2 = |x| + x$, $(f_1)_x = (f_2)_x \iff x < 0$.

Viceversa, se $Z_{\sigma_1, \sigma_2}$ è chiuso $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ e $X$ è Hausdorff, allora $\mathcal{S}$ è Hausdorff. Si dimostra con un disegno.

$(\mathcal{S}, \pi)$ fascio su $X$, $(\Gamma_\pi, \pi')$ fascio dei germi delle sezioni (cont.) di $\mathcal{S}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \Gamma_\pi \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\varphi : \mathcal{S} \to \Gamma_\pi$ morfismo di fasci su $X$: $s \in \mathcal{S}$, $x = \pi(x)$, $\sigma_s : U_s \to \mathcal{S}$, $U_s \subset X$ aperto, $x \in U_s$, $\sigma_s \in \Gamma(U_s, \mathcal{S})$, $\sigma_s(x) = s$.

biunivoca $\Uparrow$ $\varphi^{-1}([U, \sigma]_{\sim x}) = \sigma(x)$

$\varphi : s \mapsto [(U_s, \sigma_s)]_{\sim x}$; è ben def. e $\pi' \circ \varphi = \pi$. È continua:

$\emptyset \neq U \subset X$ aperto, $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, $A_{U, \sigma} = \bigcup_{x \in U} \{\sigma_x\}$,

$\varphi^{-1}(A_{U, \sigma}) = \bigcup_{x \in U} \{\sigma(x)\} = \sigma(U)$ aperto.

$\mathcal{S} \cong \Gamma_\pi$ isomorfi come fasci su $X$.

$\varphi_x : \mathcal{S}_x \to (\Gamma_\pi)_x$ è biunivoca. $\mathcal{S}_x = \varinjlim_{\substack{x \in U \subset X \\ \text{aperti}}} \Gamma(U, \mathcal{S})$.

Def.: un PREFASCIO (DI INSIEMI) su $X$ $S$ è il dato di:

- $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto $\rightsquigarrow S(U)$ insieme $(S(\emptyset) = \emptyset)$;
- $\forall \emptyset \neq V \subset U \subset X$ aperti $\rightsquigarrow \rho^U_V : S(U) \to S(V)$ restrizione da $U$ a $V$;
- $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto, $\rho^U_U = id_{S(U)}$;
- $\forall \emptyset \neq W \subset V \subset U \subset X$ aperti, $\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$.

$S$ è un funtore controvariante da $\mathrm{Top}\, X$ in Sets.

oggetti: aperti di $X$, frecce: funzioni

$\emptyset$ oggetto di Sets è iniziale: $\exists!\ \emptyset \to A$ $\forall$ insieme $A$, se $A \neq \emptyset$, $\nexists A \to \emptyset \Rightarrow \forall \emptyset \neq V \subset U \subset X$ aperti, $S(U) \neq \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow S(V) \neq \emptyset$.

Def.: $S$ prefascio su $X$, il SUPPORTO (INSIEMISTICO) di $S$ è

$\mathrm{SetSupp}(S) = \{x \in X \mid \exists U \subset X \text{ aperto}, x \in U \text{ t.c. } S(U) \neq \emptyset\} =$

$= \bigcup_{\substack{U \subset X \\ \text{aperto}, \\ S(U) \neq \emptyset}} U$ aperto in $X$.

Es.: prefasci di applicazioni con restrizioni usuali.

- $\mathcal{F}_{X,Y} : U \to \{F : U \to Y\}$;
- $\mathcal{C}^0_{X,Y} : U \to \{F : U \to Y \text{ cont.}\}$, $Y$ s.t.;
- $\mathcal{C}^\infty_X : U \to \{F : U \to \mathbb{C}\ \ C^\infty\}$;
- $\mathcal{C}^{\infty *}_X : U \to \{F : U \to \mathbb{C}^*\ \ C^\infty\}$.

Ex.: - $A^p : U \to \{p\text{-forme diff. su } U\}$ $X$ varietà diff;

- $Z^p : U \to \{$ " " " " " chiuse$\}$;
- $B^p : U \to \{$ " " " " " esatte$\}$;
- $H^p : U \to \dfrac{Z^p(U)}{B^p(U)}$.

Ex.: - $M$ insieme, il prefascio costante a valori in $M$ è $\underset{\{f : U \to M \text{ cost.}\}}{\overset{}{S(U) = \overset{\shortparallel}{M}}}$ $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto con restrizioni $id_M$;

- il prefascio grattacielo a supporto $x_0 \in X$ chiuso a valori in $M$. Fissiamo $\bar{m} \in M$, sia $\emptyset \neq U \subset X$ aperto,

$S(U) \begin{cases} M & \text{se } x_0 \in U \\ \{\bar{m}\} & \text{se } x_0 \notin U \end{cases}$. Se $x_0 \in V \subset U \subset X$ aperti, $\rho^U_V = id_M$, $\rho^U_V = \mathrm{cost}(\bar{m})$ altrimenti.

Def.: un MORFISMO di prefasci su $X$ $\Phi : S \to S'$ è il dato di:

$\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto, $\varphi_U : S(U) \to S(V)$;

$\forall \emptyset \neq V \subset U \subset X$ aperti, $\varphi_V \circ \rho^U_V = \rho'^U_V \circ \varphi_U$.

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S'(U) \arrow[d, "\rho'^U_V"] \\ S(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & S'(V) \end{tikzcd}$$

$S'$ è SOTTOPREFASCIO di $S$ se $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto $S'(U) \subset S(U)$ e $\rho'^U_V = \rho^U_{V|S'(U)}$.

$S$ prefascio su $X$, definiamo un fascio su $\mathrm{SetSupp}(S)$:

$\forall p \in \mathrm{SetSupp}(S)$, $\mathcal{S}_p = \varinjlim_{\substack{p \in U \\ \text{aperto}}} S(U) = \{(U, s) \mid p \in U \subset X \text{ aperto}, s \in S(U)\} / \sim_p$,

dove $(U, s) \sim_p (U', s') \iff \exists\ W \subset U \cap U'$ aperto, $p \in W$ t.c. $\rho^U_W(s) = \rho^{U'}_W(s') \in S(W)$; $[(U, s)]_{\sim_p} = s_p$.

$\mathcal{S}_p$ è la spiga su $p$ con elementi i germi di $p$.

$\mathcal{S} = \bigcup_{p \in \mathrm{SetSupp}(S)} \mathcal{S}_p$, $\pi : \mathcal{S} \to \mathrm{SetSupp}(S)$, $\pi(\mathcal{S}_p) = \{p\}$ suri., diventa un omeo. locale se su $\mathcal{S}$ mettiamo la top. data dalla base di aperti $A_{U, p} = \bigcup_{p \in U} \{s_p\} = \{s_p \mid p \in U\}$ al variare di $U \subset \mathrm{SetSupp}(S)$ aperto, $s \in S(U) \neq \emptyset$.

Si scrive $\mathcal{S} = \mathcal{S}heaf(S)$. D'ora in avanti, solo prefasci con $\mathrm{SetSupp}(S) = X$.

$\mathcal{S}$ fascio su $X$; $\Gamma(\mathcal{S})$ prefascio delle sezioni di $\mathcal{S}$, $U \to \Gamma(U, \mathcal{S})$;

$\mathcal{S}heaf(\Gamma(\mathcal{S})) \cong \mathcal{S}$. In generale, $\Gamma(\mathcal{S}heaf(S)) \neq S$.