$\exists$ morfismo di prefasci $i: S \to \Gamma(\mathrm{Sheaf}(S))$.

$\emptyset \neq U \subset X$ aperto, $s \in S(U)$, $i_U(s) \in \Gamma(\mathrm{Sheaf}(S))(U) = \Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S))$,

$$i_U(s): \begin{array}{l} U \to \mathrm{Sheaf}(S). \\ x \mapsto s_x \end{array}$$

Es.: $S(X) = \{0,1\}$, $S(U) = \{0\}$ $\forall \emptyset \neq U \subsetneq X$ aperto con restrizioni nulle.

Se $\forall x \in X$ $x$ è contenuto in un aperto proprio, $\mathrm{Sheaf}(S)_x = \{0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{Sheaf}(S) = X$.
$\Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S)) = \{0\}$ $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto, in particolare
$\Gamma(X, \mathrm{Sheaf}(S)) = \{0\} \neq S(X)$.

Es.: $S$ prefascio costante su $X$ a valori in $M$,
$\mathrm{Sheaf}(S)_x = M$ $\forall x \in X \Rightarrow \mathrm{Sheaf}(S)$ è il fascio costante a valori in $M$ $(X \times M)$.
$S(U) = \{f: U \to M \text{ costanti}\} \neq$ $(\emptyset \neq U \subset X$ aperto$)$
$\neq \Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S)) = \{f: U \to M \text{ loc. costanti}\}$.

Def.: se $\Gamma(\mathrm{Sheaf}(S)) = S$ diciamo che $S$ è un prefascio CANONICO.

Es.: $S$ prefascio grattacielo a valori in $M$ e supporto $x_0 \in X$.

$\emptyset \neq U \subset X$ aperto, $S(U) = \begin{cases} \{\bar{m}\} & \text{se } x_0 \notin U \\ M & \text{se } x_0 \in U \end{cases}$ $(\bar{m} \in M) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Sheaf}(S)_x = \begin{cases} \{\bar{m}\} & \text{se } x \neq x_0 \\ M & \text{se } x = x_0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Sheaf}(S)$ è il fascio grattacielo a spiga $M$ e supporto in $x_0$.

$\emptyset \neq U \subset X$ aperto, $\Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S)) = \begin{cases} \{\bar{m}\} & \text{se } x_0 \notin U \\ M & \text{se } x_0 \in U \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma(\mathrm{Sheaf}(S)) = S$.

In generale, una sezione di $\mathrm{Sheaf}(S)$ su $\emptyset \neq U \subset X$ aperto, $\sigma \in \Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S))$, $\sigma: U \to \mathrm{Sheaf}(S)$, $\sigma(x) \in \mathrm{Sheaf}(S)_x$ $\forall x \in U$, $\sigma(x) = [(V,s)]_{\sim x}$, $\emptyset \neq V \subset U$ aperto, $x \in V$, $s \in S(V) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(y) = [(V,s)]_{\sim y}$ $\forall y \in V$. $\sigma_{|V} = i_V(s)$.

Teo.: il prefascio $S$ su $X$ è canonico $\iff$ (S1) e (S2) $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto.

(S1): dati $s, t \in S(U)$ t.c. $\exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di $U$ t.c. $\rho^U_{U_\alpha}(s) = \rho^U_{U_\alpha}(t)$ $\forall \alpha \in I \Rightarrow s = t$;

(S2): dati $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di $U$, $\forall \alpha \in I$ $s_\alpha \in S(U_\alpha)$, se $\forall \alpha, \beta \in I$ t.c. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)$ (dati locali compatibili), $\exists s \in S(U)$ t.c. $\forall \alpha \in I$ $\rho^U_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$ (reincollamento).

Dim.: $(\Rightarrow)$ $\Gamma(\mathrm{Sheaf}(S)) = S \Rightarrow$ le restrizioni di $S$ sono restrizioni di applicazioni (sezioni di $\mathrm{Sheaf}(S)$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ valgono (S1) e (S2).

$(\Leftarrow)$ $i_U: S(U) \to \Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S))$ sono biunivoche.
Se $s, t \in S(U)$, $i_U(s) = i_U(t)$, allora $\forall x \in U$ $s_x = t_x \iff$
$\iff \forall x \in U$ $\exists x \in W_x \subset U$ aperto t.c. $\rho^U_{W_x}(s) = \rho^U_{W_x}(t)$.
(S1) applicato a $\{W_x\}_{x \in U} \Rightarrow s = t$.
Sia $\sigma \in \Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S))$. $\forall x \in U$ $\exists x \in U_x \subset U$ aperto e $s^x \in S(U_x)$ t.c. $\forall y \in U_x$ $\sigma(y) = (s^x)_y$.
Se $x_1, x_2 \in U$ t.c. $U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \emptyset$,
$t_1 = \rho^{U_{x_1}}_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(s^{x_1})$, $t_2 = \rho^{U_{x_2}}_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(s^{x_2})$.
$i_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(t_1)$, $i_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(t_2)$?
$z \in U_{x_1} \cap U_{x_2}$, $(t_1)_z = (s^{x_1})_z = \sigma(z) = (s^{x_2})_z = (t_2)_z \Rightarrow$
$\Rightarrow i_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(t_1) = \underbrace{i_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}}_{\text{ini.}}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$.
(S2) applicato a $\{U_x\}_{x \in U} \Rightarrow \exists s \in S(U)$ t.c. $\rho^U_{U_x}(s) = s^x$ $\forall x \in U \Rightarrow i_U(s)(x) = (s^x)_x = \sigma(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow i_U(s) = \sigma$. $\square$

Un morfismo di prefasci su $F: S \to S'$ induce un morfismo di fasci su $X$ $f: \mathrm{Sheaf}(S) \to \mathrm{Sheaf}(S')$; $y \in \mathrm{Sheaf}(S)$, $x = \pi(y)$, $y = s_x$, $s_x \in S(U_x)$, $x \in U_x \subset X$ aperto, $f(y) = (F_{U_x}(s_x))_x \in S'(U_x)$.

$\varphi: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ morfismo di fasci su $X$ induce morfismo di prefasci su $X$ $\Phi: \Gamma(\mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{S}')$ per composizione:
$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"] & \mathcal{S}' \arrow[d, "\pi'"] \\ U \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

Def.: $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ fasci su $X$, il PRODOTTO FIBRATO di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ è
$\mathcal{S} \times_X \mathcal{S}' = \{(s, s') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}' \mid \pi(s) = \pi'(s')\}$ con proiezione
$\pi_X((s,s')) = \pi(s) = \pi'(s')$.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \times_X \mathcal{S}' \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_X"] & \mathcal{S}' \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$
$\pi_X$ è omeo. locale sugli aperti $U \times U' \cap \mathcal{S} \times_X \mathcal{S}' = U \times_X U'$, $U \subset \mathcal{S}$ $(U' \subset \mathcal{S}')$ aperto t.c. $\pi$ $(\pi')$ sia omeo. locale e $\pi(U) = \pi'(U')$.
$x \in X$, $(\mathcal{S} \times_X \mathcal{S}')_x = \mathcal{S}_x \times \mathcal{S}'_x$.

## Prefasci e fasci con struttura

Def.: un fascio di GRUPPI ABELIANI su $X$ è un fascio $(\mathcal{S}, \pi)$ su $X$ t.c. $\forall x \in X$ $\mathcal{S}_x$ è un g.a. e t.c.
$$\varphi: \begin{array}{l} \mathcal{S} \times_X \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ (s_x, t_x) \mapsto s_x - t_x \in \mathcal{S}_x \end{array}$$
sia un morfismo di fasci su $X$, cioè $\varphi$ continua.

In questo caso $0: \begin{array}{l} X \to \mathcal{S} \\ x \mapsto 0_x \in \mathcal{S}_x \end{array}$ è una sezione di $\mathcal{S}$ perché
$0 \equiv \varphi(s,s)$ $\forall$ sezione $s$ di $\mathcal{S}$. $0 \in \Gamma(X, \mathcal{S})$ e $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto $\Gamma(U, \mathcal{S}) \neq \emptyset$.

Fascio di anelli commutativi: si richiede anche che la mappa
$$\begin{array}{l} \mathcal{S} \times_X \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ (s_x, t_x) \mapsto s_x \cdot t_x \in \mathcal{S}_x \end{array}$$
sia un morfismo di fasci su $X$ e
$$1: \begin{array}{l} X \to \mathcal{S} \\ 1 \mapsto 1_x \in \mathcal{S}_x \end{array}$$
sia una sezione.

Fasci di $\mathbb{K}$-algebre (o s.v. su $\mathbb{K}$):
$$\underbrace{\mathbb{K}}_{\text{fascio costante}} \times_X \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}, \quad (\lambda, s_x) \mapsto \lambda s_x \in \mathcal{S}_x$$
morfismo di fasci su $X$.

Es.: $X$ varietà complessa, $\mathcal{O}_X$ fascio di $\mathbb{C}$-algebre su $X$.
$\mathcal{O}^*_X$ fascio di gruppi abeliani su $X$.

Def.: un prefascio di g.a. (anelli, $\mathbb{K}$-algebra) su $X$ è un funtore controvariante $S$ da $\mathrm{Top}\,X \to$ Gruppi Abeliani (anelli, $\mathbb{K}$-algebre); si chiede che le restrizioni siano omomorfismi.
$\emptyset$ non è un oggetto di Gruppi Abeliani $\Rightarrow \mathrm{SetSupp}(S) = X$
(si preferisce $S(\emptyset) = \{0\}$).

$S$ prefascio di g.a. su $X \Rightarrow \mathrm{Sheaf}(S)$ fascio di g.a. su $X$.
$x \in X$, in $\mathrm{Sheaf}(S)_x$ voglio definire $[(U,s)]_{\sim x} + [(V,t)]_{\sim x}$
$(U, V \subset X$ aperti, $x \in U \cap V$, $s \in S(U)$, $t \in S(V))$;
$[(U,s)]_{\sim x} + [(V,t)]_{\sim x} = [(U \cap V, \underbrace{\rho^U_{U \cap V}(s) + \rho^V_{U \cap V}(t)}_{\in S(U \cap V)})]_{\sim x}$.

$\mathcal{S}$ fascio di g.a. su $X \Rightarrow \Gamma(\mathcal{S})$ prefascio di g.a. su $X$.
$\emptyset \neq U \subset X$ aperto, $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{S})$.
$s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, $(-s)(x) = -s(x) \in \mathcal{S}_x$, voglio dire $-s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$.
$-s = \varphi(0, s) \Rightarrow -s$ continua $\Rightarrow s + t = \varphi(s, -t)$ continua.

Def.: $Y \subset X$, $\mathcal{S}$ fascio di g.a. su $Y$. L'ESTENSIONE a 0 di $\mathcal{S}$ su $X$ è il fascio $\mathcal{S}'$ su $X$ associato al prefascio $(\emptyset \neq U \subset X$ aperto$)$
$U \mapsto \Gamma(U \cap Y, \mathcal{S}) \cup \{0\}$.
Se $y \in Y$, $\mathcal{S}'_y = \mathcal{S}_y$, se $x \notin \bar{Y}$ $\mathcal{S}'_x = \{0\}$.

Def.: un morfismo di prefasci di g.a. su $X$ $F: S \to S'$ morfismo di prefasci su $X$ t.c. $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto $F_U: S(U) \to S'(U)$ è omomorfismo di g.a..
Un morfismo di fasci di g.a. su $X$ è $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ morfismo di fasci su $X$ t.c. $\forall x \in X$ $f_x: \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}'_x$ è omomorfismo di g.a..

$F$ induce $f: \mathrm{Sheaf}(S) \to \mathrm{Sheaf}(S')$ morfismo di fasci di g.a. su $X$,
$f$ induce $F: \Gamma(\mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{S}')$ morfismo di prefasci di g.a. su $X$.

Es.: $\begin{array}{l} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}^*_X \\ f \mapsto e^{2\pi i f} \end{array}$ è un morfismo di fasci di g.a. su $X$.

Def.: $\varphi: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ morfismo di fasci di g.a. su $X$.
$\mathrm{Ker}\,\varphi = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Ker}\,\varphi_x$, $\varphi_x: \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}'_x$. $\mathrm{Ker}\,\varphi$ è un sottofascio di $\mathcal{S}$.
$= \varphi^{-1}(\underbrace{0(X)}_{\text{in } \mathcal{S}'})$ è aperto in $\mathcal{S}$.

$\mathrm{Ker}\,\varphi$ è il fascio associato al prefascio canonico
$U \mapsto \mathrm{Ker}(\Phi_U: \Gamma(U, \mathcal{S}) \to \Gamma(U, \mathcal{S}'))$.

Es.: $\begin{array}{l} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*_X \\ f \mapsto e^{2\pi i f} \end{array}$, $e^{2\pi i f} = 1 \iff f$ a valori in $\mathbb{Z} \iff$
$\iff f$ loc. cost. a valori in $\mathbb{Z}$; allora
$\mathrm{Ker}\,\exp = \mathbb{Z}$ fascio costante.