Def.: un COMPLESSO di fasci di g.a. su X è una successione di fasci di g.a. su X e morfismi di fasci di g.a. su X

$$\dots \to \mathcal{S}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{S}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{S}_{i+1} \to \dots \quad \text{t.c.}$$

$\varphi_i \circ \varphi_{i-1} = 0$, cioè $\mathrm{Im}\,\varphi_{i-1} \subset \mathrm{Ker}\,\varphi_i$.

$\forall x \in X$,

$$\dots \to (\mathcal{S}_{i-1})_x \xrightarrow{\varphi_{i-1,x}} (\mathcal{S}_i)_x \xrightarrow{\varphi_{i,x}} (\mathcal{S}_{i+1})_x \to \dots \text{ è un}$$

complesso di g.a.: $\varphi_{i,x} \circ \varphi_{i-1,x} = 0$, cioè $\mathrm{Im}\,\varphi_{i-1,x} \subset \mathrm{Ker}\,\varphi_{i,x}$.

Si dice ESATTO se $\forall i$ $\mathrm{Im}\,\varphi_{i-1} = \mathrm{Ker}\,\varphi_i$; $\forall x \in X, \forall i$ $\mathrm{Im}\,\varphi_{i-1,x} = \mathrm{Ker}\,\varphi_{i,x}$.

Es.: X varietà complessa, $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 1$ è successione esatta di fasci di g.a. su X.

$\exp_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X^*)$ in generale non è suriettiva; lo è se U è semplicemente connesso $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è suriettiva sui germi, e questo ci basta.

Es.: $V \subset X$ sottovarietà complessa.

$$0 \to \underset{\underset{\mathrm{Ker}\,r}{\parallel}}{I_V} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{r} \mathcal{O}_V \to 0 \text{ esatta di fasci di g.a. su } X.$$

($\mathcal{O}_V$: fascio su X esteso a 0)

Localmente $V \subset X$ è come $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$.

Es.: X varietà diff.,

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty_{X,\mathbb{R}} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1_{X,\mathbb{R}} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2_{X,\mathbb{R}} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^3_{X,\mathbb{R}} \to \dots$$

è esatta di fasci di g.a. su X (per un teorema di Poincaré).

Es.: $0 \to \Omega^p \to \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,k} \xrightarrow{\bar\partial} \dots$

(Ω^p: germi di p-forme olomorfe; $(d = \partial + \bar\partial)$; $\mathcal{A}^{p,k}$: germi di (p,k)-forme C^∞ a valori in $\mathbb{C}$)

è esatta di g.a. su X ($\Leftarrow \bar\partial$-Poincaré).

$\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ morfismo di fasci di g.a. su X,

$0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to \mathcal{S} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Im}\,\varphi \to 0$ è esatta di fasci di g.a. su X.

Def.: una successione di prefasci e morfismi di prefasci di g.a. su X

$$\dots \to S_{i-1} \xrightarrow{F_{i-1}} S_i \xrightarrow{F_i} S_{i+1} \to \dots$$

si dice COMPLESSO se $\forall\, \emptyset \neq U \subset X$ aperto

$\dots \to S_{i-1}(U) \xrightarrow{F_{i-1,U}} S_i(U) \xrightarrow{F_{i,U}} S_{i+1}(U) \to \dots$ è un complesso di g.a.,

ESATTA se lo è $\forall\, \emptyset \neq U \subset X$ aperto.

S_* complesso di prefasci di g.a. su $X \Rightarrow \mathrm{Sheaf}(S_*)$ complesso di fasci di g.a. su X; $\mathcal{S}_*$ complesso di fasci di g.a. su $X \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma(\mathcal{S}_*)$ complesso di prefasci di g.a. su X.

Prop.: S_* esatta $\Rightarrow \mathrm{Sheaf}(S_*)$ esatta.

Dim.: $S \xrightarrow{F} S' \xrightarrow{G} S''$ esatta (di prefasci di g.a. su X).

$\forall x \in X$, $\mathrm{Sheaf}(S)_x \xrightarrow{F_x} \mathrm{Sheaf}(S')_x \xrightarrow{G_x} \mathrm{Sheaf}(S'')_x$,
allora $\mathrm{Ker}\,G_x = \mathrm{Im}\,F_x$.

$\supset$: $G_x F_x([U, \underset{S(U)}{s}]_{\sim x}) = [(U, \underset{\underset{0}{\parallel}}{G_U F_U(s)})]_{\sim x} = [(U,0)]_{\sim x} = 0_x$.

$\subset$: $[(U, s')]_{\sim x} \in \mathrm{Sheaf}(S')_x$ t.c. $0 = G_x([(U,s')]_{\sim x}) = [(U, G_U(s'))]_{\sim x}$.

$\exists\, x \in W \subset U$ aperto t.c. $\underset{\underset{G_W(\rho'^U_W(s'))}{\parallel}}{\rho''^U_W(G_U(s'))} = 0 \in S''(W) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho'^U_W(s') \in \mathrm{Ker}\,G_W = \mathrm{Im}\,F_W \Rightarrow \exists\, s \in S(W)$ t.c.
$\rho'^U_W(s') = F_W(s)$. Allora $[(U, s')]_{\sim x} = [(W, \rho'^U_W(s'))]_{\sim x} =$
$= [(W, F_W(s))]_{\sim x} = F_x([(W,s)]_{\sim x})$. $\square$

Prop.: $0 \to \mathcal{S} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}' \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}''$ esatta di fasci di g.a. su $X \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \to \Gamma(\mathcal{S}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(\mathcal{S}') \xrightarrow{\beta} \Gamma(\mathcal{S}'')$ esatta di prefasci.

Dim.: vogliamo: $\forall\, \emptyset \neq U \subset X$ aperto,

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{S}) \xrightarrow{\alpha_U} \Gamma(U, \mathcal{S}') \xrightarrow{\beta_U} \Gamma(U, \mathcal{S}'') \text{ esatta.}$$

α_U iniettiva: $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ t.c. $0 = \alpha_U(\sigma) = \alpha \circ \sigma$.

$\forall x \in U$, $\underset{\underset{\alpha(\sigma(x))}{\parallel}}{\alpha_x(\sigma(x))} = 0_x \in \mathcal{S}'_x \underset{\alpha_x \text{ iniettiva}}{\Longrightarrow} \sigma(x) = 0_x\ \forall x \in U \Rightarrow \sigma = 0$.

$\mathrm{Im}\,\alpha_U \subset \mathrm{Ker}\,\beta_U$: $\beta_U \alpha_U(\sigma) = \overset{\overset{0}{\parallel}}{\alpha \circ \beta}(\sigma) = 0$.

$\mathrm{Im}\,\alpha_U \supset \mathrm{Ker}\,\beta_U$: $\sigma' \in \Gamma(U, \mathcal{S}')$ t.c. $\underset{\underset{\beta \circ \sigma'}{\parallel}}{\beta_U(\sigma')} = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{S}'')$.

$\forall x \in U$ $\beta_x(\sigma'(x)) = (\beta \circ \sigma')(x) = 0_x$. $\exists\, s \in \mathcal{S}_x$ t.c.
$\alpha_x(s) = \sigma'(x)$, quindi $\forall x \in U$ $\exists\, x \in U_x \subset U$ aperto e
$s^x \in \Gamma(U_x, \mathcal{S})$ t.c. $\underset{\underset{\alpha \circ s^x}{\parallel}}{\alpha_{U_x}(s^x)} = \sigma'_{|U_x}$.

Se $U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \emptyset$, $\underset{\underset{\alpha_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(s^{x_1}|_{U_{x_1} \cap U_{x_2}})}{\parallel}}{\rho^{U_{x_1}}_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(\alpha \circ s^{x_1})} = \sigma'|_{U_{x_1} \cap U_{x_2}} = \underset{\underset{\alpha_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(s^{x_2}|_{U_{x_1} \cap U_{x_2}})}{\parallel}}{\rho^{U_{x_2}}_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(\alpha \circ s^{x_2})}$,

$\alpha_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}$ iniettiva $\Rightarrow s^{x_1}|_{U_{x_1} \cap U_{x_2}} = s^{x_2}|_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}$.

Le s^x si rincollano a dare $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ t.c. $s_{|U_x} = s^x$ $\forall x \in U$.

$\alpha_U(s) = \sigma'$, infatti $\alpha_U(s)_{|U_x} = \alpha_{U_x}(s_{|U_x}) = \alpha_{U_x}(s^x) = \sigma'_{|U_x}$. $\square$

Def.: $\mathcal{S}'$ sottofascio di g.a. del fascio di g.a. $\mathcal{S}$ su X ($\mathcal{S}'_x \subset \mathcal{S}_x$ sottogruppo),
$\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ è il fascio associato al prefascio non canonico

$\underset{\text{aperto}}{X \supset U} \mapsto \Gamma(U, \mathcal{S})/\Gamma(U, \mathcal{S}')$. $(\mathcal{S}/\mathcal{S}')_x = \mathcal{S}_x/\mathcal{S}'_x$ $\forall x \in X$,

$\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}/\mathcal{S}' \to 0$ è esatta.

$0 \to \mathcal{S}' \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{S} \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}/\mathcal{S}' \to 0$ è esatta di fasci di g.a. su X.

$\varphi : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ morfismo di fasci di g.a. su X,

$\mathrm{Coker}\,\varphi$ è il fascio associato al prefascio non canonico

$\underset{\text{aperto}}{X \supset U} \mapsto \Gamma(U, \varphi)/\varphi_U(\Gamma(U, \mathcal{S}'))$. $(\mathrm{Coker}\,\varphi)_x = \mathcal{S}_x/\varphi_x(\mathcal{S}'_x)$,

$0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to \mathcal{S} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}' \to \mathrm{Coker}\,\varphi \to 0$ è esatta.

Oss.: una sezione di $\mathrm{Coker}\,\varphi$ su $U \subset X$ aperto è il dato di $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di U e $\forall \alpha \in I$ $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$ t.c. se $\alpha, \beta \in I$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} - s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \in \varphi_{U_\alpha \cap U_\beta}(\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{S}'))$.

Due tali sezioni $\{U_\alpha, s_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\{U'_\beta, s'_\beta\}_{\beta \in J}$ coincidono se
se $\forall p \in U$, $U_\alpha \ni p$, $U'_\beta \ni p$ $\exists\, p \in W \subset U_\alpha \cap U'_\beta$ aperto t.c.
$s_{\alpha|W} - s_{\beta|W} \in \varphi_W(\Gamma(W, \mathcal{S}'))$.

Def.: una successione esatta di fasci di g.a. su X del tipo

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \to \dots$ si dice RISOLUZIONE di $\mathcal{F}$.

Es.: risoluzione canonica di $\mathcal{F}$. Consideriamo il prefascio canonico

$$\Sigma\mathcal{F} : \underset{\underset{X}{\cap}}{U}\ \text{aperto} \mapsto \{ f : U \to \mathcal{F} \mid \pi \circ f = id_U \},$$

$\mathrm{Can}^0(\mathcal{F}) = \mathrm{Sheaf}(\Sigma\mathcal{F})$.

$0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \overset{i}{\hookrightarrow} \Sigma\mathcal{F}$ è esatta di prefasci $\Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathrm{Can}^0(\mathcal{F})$ è esatta di fasci; $Z^1(\mathcal{F}) = \mathrm{Coker}\,i$,

$0 \to \mathcal{F} \to \mathrm{Can}^0(\mathcal{F}) \to Z^1(\mathcal{F}) \to 0$.

$\mathrm{Can}^1(\mathcal{F}) = \mathrm{Can}^0(Z^1(\mathcal{F}))$, $Z^2(\mathcal{F}) = Z^1(Z^1(\mathcal{F}))$,

$0 \to Z^1(\mathcal{F}) \to \mathrm{Can}^1(\mathcal{F}) \to Z^2(\mathcal{F}) \to 0$ esatta $\Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{F} \to \mathrm{Can}^0(\mathcal{F}) \to \mathrm{Can}^1(\mathcal{F}) \to Z^2(\mathcal{F}) \to 0$ esatta.

$\forall i$, $\mathrm{Can}^i(\mathcal{F}) = \mathrm{Can}^0(Z^i(\mathcal{F}))$, $Z^{i+1} = Z^1(Z^i(\mathcal{F}))$,

$0 \to Z^i(\mathcal{F}) \to \mathrm{Can}^i(\mathcal{F}) \to Z^{i+1}(\mathcal{F}) \to 0$ esatta,

combinandole abbiamo $0 \to \mathcal{F} \to \mathrm{Can}^0(\mathcal{F}) \to \mathrm{Can}^1(\mathcal{F}) \to \mathrm{Can}^2(\mathcal{F}) \to \dots$ esatta.