$\mathcal{F}$ fascio di g.a. su X paracpt, $\mathcal{U}$ ricoprimento aperto di X. $\emptyset \neq U \subseteq X$ aperto, $U \longmapsto \check{C}^p(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}_{|U})$ è un prefascio canonico di g.a. su X, $\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

$$\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{S}heaf\, \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}).\ \delta \text{ induce } \delta \text{ t.c.}$$

$$0 \to \mathcal{F} \to \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots \text{ risoluzione di } \mathcal{F}.$$

Inoltre, $\mathcal{F}$ fiacco $\Rightarrow \check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ fiacco $\forall p \Rightarrow$ passando alle sezioni globali rimane esatta e la coomologia è $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0\ \forall p \geq 1$.
Allora $\mathcal{F}$ fiacco $\Rightarrow$ è aciclico e Čech-aciclico (raffinando $\mathcal{U}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ la risoluzione canonica di $\mathcal{F}$ è data da fasci aciclici e Čech-aciclici $\underset{\text{De Rham astratto}}{\Longrightarrow} H^p(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^p(X, \mathcal{F})\ \forall p \geq 0$.

X paracpt Hausdorff, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di X loc. finito. Il NERBO di $\mathcal{U}$ è un complesso simpliciale con vertici I e ha un p-simplesso di vertici $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in I \Leftrightarrow U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} \neq \emptyset$.
$C^p_{simp}(N(\mathcal{U}), \mathbb{Z})$ "$\cong$" $\check{C}^p(\mathcal{U}, X)$ con lo stesso cobordo.
Se $\mathcal{U}$ è abbastanza fine, $H^p_{\text{simp}}(N(\mathcal{U}), \mathbb{Z}) \cong H^p_{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})$.

$$H^p_{sing}(X, \mathbb{Z}) = \check{H}^p(X, \mathbb{Z})\ \forall p \geq 1.$$

Su $\mathbb{C}^n$ coordinate $z_1, \dots, z_n$, $z_j = x_j + i y_j$.
$(\mathbb{C}^n)^* \ni dz_j = dx_j + i dy_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineare,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \longmapsto z_j$$

$d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ anti $\mathbb{C}$-lineare.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \longmapsto \bar{z}_j$$

Def.: $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, $f: U \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa se vale una delle seguenti:
a) f è analitica: $\forall u \in U\ \exists u \in V \subseteq U$ aperto, $\exists$ serie di potenze $\sum_{\mathbb{N}^n} a_{j_1, \dots, j_n} (z_1 - u_1)^{j_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - u_n)^{j_n}$ convergente su V a $f_{|V}$;
Oss.: la serie converge assolutamente ($\rightsquigarrow$ non c'è problema di def.);
la serie converge unif. sui cpt;
il raggio di convergenza è il massimo possibile;
b) f è continua, $\exists$ derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial y_j}\ \forall j = 1, \dots, n$ su tutto U e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = 0\ \forall j = 1, \dots, n$ su tutto U (Cauchy-Riemann);
c) f è separatamente olomorfa in ogni z_j.
a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) è facile.
(c) $\underset{\text{non lo facciamo}}{\Longrightarrow}$) b) $\Rightarrow$ a). Reiterando la formula di Cauchy in una variabile, su un disco $\Delta(u, r) = \{|z - u| < r\}$, $\overline{\Delta(u, r)} \subseteq U$

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_1 - u_1| = r} \frac{dw_1}{w_1 - u_1} \int_{|w_2 - u_2| = r} \frac{dw_2}{w_2 - u_2} \cdots \int_{|w_n - u_n| = r} \frac{f(w)\, dw}{z_n - w_n} =$$

$$\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \cdots \int \frac{f(w)\, dw_1 \dots dw_n}{(z_1 - w_1) \cdot \ldots \cdot (z_n - w_n)}.$$

$$\frac{1}{(z_1 - w_1) \cdot \ldots \cdot (z_n - w_n)} = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n = 0}^{+\infty} \frac{(z_1 - u_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - u_n)^{\nu_n}}{(w_1 - u_1)^{\nu_1 + 1} \cdot \ldots \cdot (w_n - u_n)^{\nu_n + 1}} \text{ convergente unif. sui cpt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum a_{\nu_1, \dots, \nu_n} (z_1 - u_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - u_n)^{\nu_n} \text{ con}$$

$$a_{\nu_1, \dots, \nu_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \cdots \int \frac{f(w)\, dw_1 \dots dw_n}{(w_1 - u_1)^{\nu_1 + 1} \cdot \ldots \cdot (w_n - u_n)^{\nu_n + 1}}.$$

Oss.: la serie di potenze che dà f in un intorno di u è completamente determinata dal germe di f in u. $\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$,
$a_{\nu_1, \dots, \nu_n} = \frac{1}{\nu_1! \cdot \ldots \cdot \nu_n!} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \dots \partial z_n^{\nu_n}}(u)$.

Def.: $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ è il fascio di germi di funzioni olomorfe su $\mathbb{C}^n$;
$U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = \{f: U \to \mathbb{C} \text{ olo.}\}$.
$\mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n}$ " " " " " " " " " " mai nulle;
" ", $\Gamma(U, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n}) = \{f: U \to \mathbb{C}^* \text{ olo.}\}$.
$u \in \mathbb{C}^n$, $\underset{\text{la spiga}}{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, u}}$ è anello commutativo con invertibili $\mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n, u}$.

$$v_u: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, u} \to \mathbb{C} \quad \text{ben def. e omomorfismo di anelli.}$$
$$[(U, f)]_{\sim u} \longmapsto f(u)$$

$\operatorname{Ker} v_u =: \mathfrak{m}_u$ è l'unico ideale massimale in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, u}$ ($\Rightarrow$ è anello locale).
$[(U, f)]_{\sim u}$ t.c. $f(u) \neq 0 \Rightarrow \exists u \in V \subseteq U$ aperto t.c. $f(z) \neq 0\ \forall z \in V$.
$[(V, 1/f)]_{\sim u}$ è l'inverso del germe $[(U, f)]_{\sim u}$.
Oss.: $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, u} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} =: \mathcal{O}_n$ (usando le traslazioni di $\mathbb{C}^n$) $\forall u \in \mathbb{C}^n$.
$\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ non contiene funzioni a valori reali o di modulo costante eccetto le funzioni localmente costanti e $\mathcal{O}_n$ non contiene i germi di tali funzioni.
$f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$, $f: U \to \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial y_j}: U \to \mathbb{R}\ \forall j = 1, \dots, n$,
ma $\frac{\partial f}{\partial x_j} = -i \frac{\partial f}{\partial y_j} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0\ \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow f$ loc. cost..
Se $|f| \equiv \rho \neq 0$, scriviamo $f(z) = \rho e^{i\theta(z)}$, $\theta: U \to \mathbb{R}$ continua,
$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = i f \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_j} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_j} = 0\ \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \theta$ olo. $\Rightarrow$ loc. cost..

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ è Hausdorff, infatti vale il principio di identità per funzioni olomorfe.
$\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto connesso, $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ t.c. $\exists \emptyset \neq V \subseteq U$ aperto t.c. $f_{|V} = g_{|V} \Rightarrow f = g$.
Dim.: $E = \operatorname{int}(\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}) \supseteq V \neq \emptyset$. Se E chiuso, $E = U \Rightarrow f = g$.
$w \in \bar{E}$, sia $\delta > 0$ t.c. $\Delta(w, \delta) \subseteq U$ e in cui f, g siano analitiche.
Consideriamo $\Delta(w, \delta/2)$. Le serie di potenze di f e g nei punti di $\Delta(w, \delta/2)$ convergono con raggio di convergenza almeno $\delta/2$.
Sia $w' \in \Delta(w, \delta/2) \cap E$, $f - g$ è olo. su $\Delta(w', \delta/2)$ e il suo sviluppo in serie di potenze converge su tutto $\Delta(w', \delta/2) \ni w \Rightarrow$
$\underset{w' \in E}{\Longrightarrow}$ la serie di potenze di $f - g$ in w' è nulla e $f = g$ in un intorno di $w \Rightarrow$
$\Rightarrow w \in E$. $\square$
Cor.: $\mathcal{O}_n$ è un dominio.
Dim.: $fg = 0$ su un intorno aperto di 0 connesso U t.c. $f_{|U} \not\equiv 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g \equiv 0$ sull'aperto $U \setminus \{f = 0\} \neq \emptyset \Rightarrow g \equiv 0$ su U. $\square$

Media integrale: $\Delta = \Delta(u, r)$, f olo. su un intorno di $\bar{\Delta}$.

$$\int_\Delta f(p)\, \underset{\text{forma di volume}}{dV(p)} = V(\Delta) f(u).$$

Massimo modulo: $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto connesso, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ non costante $\Rightarrow$
$\Rightarrow |f|$ non ha massimi locali in U.
PA $\exists x \in U$ t.c. $|f|$ ha max. locale in x. $\exists r > 0$ t.c.
$\Delta = \Delta(x, r) \subset U$ e $|f(x)| \geq |f(z)|\ \forall z \in \Delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_\Delta (|f(x)| - |f(p)|)\, dV(p) = |f(x)| V(\Delta) - \int_\Delta |f(p)|\, dV(p) \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(x)| - |f(p)| \equiv 0 \Rightarrow |f|$ cost. su $\Delta \Rightarrow$ su U, assurdo.
Teo. (Hartogs): $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, $n \geq 2$, $u \in U$. $\rho^U_{U \setminus \{u\}}$ è suri. sulle funzioni olo.: ogni $f \in \Gamma(U \setminus \{u\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ si estende a $F \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$.