Dim. (di Hartogs): facciamo $n=2$, $u=0$.

$\Delta'(r)=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \mid |z_1|,|z_2|<r\}$, $\overline{\Delta'(r)}\subseteq U$.

$r'<r$, f olo. su $\Delta'(r)\setminus\overline{\Delta'(r')}$, estendiamo f su tutto $\Delta'(r)$.

Poniamo $F(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f(z_1,w)\,dw}{w-z_2}$ ben def. e cont. su $\Delta'(r)$, e olo. in z_2.

$$\frac{\partial F}{\partial\bar z_1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{\frac{\partial f}{\partial\bar z_1}(z_1,w)\,dw}{w-z_2}\overset{\substack{f \text{ olo. in}\\ \text{un intorno di } \{|w|=r\}}}{=}0\Rightarrow F \text{ olo. in } z_1\Rightarrow F \text{ olo.},$$

ma $F\equiv f$ su $\{r'<|z_1|<r\}\cap\Delta'(r)$ aperto $\Rightarrow F\equiv f$ su $\Delta'(r)\setminus\overline{\Delta'(r')}$. □

Teo. (Riemann): $\emptyset\neq U\subseteq\mathbb{C}^n$ aperto, $f\in\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$, $f\not\equiv0$, g olo. su $U\setminus\{f\equiv0\}$ e ivi limitata. Allora g si estende a $G\in\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$.

Lemma (preparazione di Weierstrass): f olo. in un intorno di $0\in\mathbb{C}^n$, non identicamente nulla sull'asse z_n, allora in un intorno di 0 f si scrive in modo unico come $f=hp$, h,p olo., $h(0)\neq0$, $p\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ monico con gli altri coefficienti nulli in 0.

Dim. (del teo.): il problema è locale. $\Delta\subseteq\mathbb{C}^n$ disco intorno a 0, $f(z,z_n)$ olo. su Δ, $g(z,z_n)$ olo. e lim. su $\Delta\setminus\{f=0\}$.

Assumendo $\{z=0\}\not\subseteq\{f=0\}$, scriviamo $f=hp$ in un intorno di 0, $h(0)\neq0$, $p\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Per $z=\overset{\text{piccolo}}{\tilde z}$ fissato e $|z_n|<r$ piccolo, gli zeri di $f(\tilde z,\cdot)$ sono gli zeri di $p(\tilde z,\cdot)\Rightarrow$ gli zeri di $f(\tilde z,\cdot)$ sono isolati. $g(\tilde z,\cdot)$ è lim. in un intorno di questi pti isolati $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(\tilde z,\cdot)$ si estende a $G(\tilde z,\cdot)$ olo. in z_n su $|\tilde z|<\varepsilon$, $|z_n|<r$ "piccoli".

G olo. in z_n, $G(z,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{G(z,w)\,dw}{w-z_n}$, derivando rispetto a $\bar z_i$ troviamo G olo.. □

Dim. (del lemma): l'unicità è facile.

Se $f(0)\neq0$, $h=f$, $p=1$. $f(0)=0$. Lo sviluppo in serie di f in 0 contiene termini del tipo $a_k z_n^k$. Sia $d=\min\{k \mid a_k\neq0\}$.

$f(0,z_n)=z_n^d(\underbrace{\overset{\neq0}{a_d}+a_{d+1}z_n+\dots}_{\in\mathcal{O}_n^*})$. $f(0,z_n)$ ha in $z_n=0$ uno zero isolato di ordine d.

$\exists\, r,\delta>0$ t.c. $|f(0,z_n)|\geq\delta$ su $|z_n|=r$ e su $\{|z_n|<r\}$ $f(0,z_n)$ ha solo $z_n=0$ come zero $\Rightarrow\exists\,\varepsilon>0$ t.c.

$|f(z,z_n)-f(0,z_n)|<\delta/2$ ($\Rightarrow|f(z,z_n)|\geq\delta/2$) se $|z|<\varepsilon$, $|z_n|=r$.

Teo. (Rouché): f_1,f_2 olo. su un intorno di $\{|z|\leq r\}\subset\mathbb{C}$, $|f_1|<|f_2|$ su $|z|=r\Rightarrow$ su $|z|<r$ f_2 e f_2+f_1 hanno lo stesso numero di zeri contati con molteplicità.

Nel nostro caso, se z è fissato, $|z|<\varepsilon$, $f(z,w)$ ha d zeri contati con molteplicità su $|w|<r$, siano essi $b_1,\dots,b_d$ (dipendenti da z).

Teo. (residui +): $\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}w^q\frac{\frac{\partial f(z,w)}{\partial z_n}}{f(z,w)}\,dw=b_1^q+\dots+b_d^q\ \forall q\geq0$.

Segue che le $s_q=\sum_{j=1}^d b_j^q$ sono olo. su $|z|<\varepsilon$ $\forall q\Rightarrow$

$\Rightarrow\sigma_1,\dots,\sigma_d$ (funzioni simmetriche elementari in $b_1,\dots,b_d$), essendo polinomiali nelle s_q, sono olo. su $|z|<\varepsilon$.

$p(z,z_n)=z_n^d-\sigma_1(z)z_n^{d-1}+\sigma_2(z)z_n^{d-1}-\dots+(-1)^d\sigma_d(z)\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è olo. su $|z|<\varepsilon$, $|z_n|<r$ e si annulla esattamente dove si annulla f (con molteplicità). $h(z,z_n)=\frac{f(z,z_n)}{p(z,z_n)}$ è ben def. e olo. su $|z|<\varepsilon$, $|z_n|<r$, eccetto al più dove $\{f=0\}=\{p=0\}$.

Per z fissato, $h(z,\cdot)$ ha solo singolarità eliminabili $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ si estende a olo. in $z_n\xRightarrow{\text{Cauchy}}h$ olo.. □

$n\geq2$, localmente il luogo di zeri di una funzione olo. è il luogo di zeri di un pol. $p\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

$\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^{n-1}$, $(z,z_n)\mapsto z$, $\rho=\pi|_{\{f=0\}}:\{f=0\}\to\mathbb{C}^{n-1}$.

$\rho^{-1}(z)=\{\text{radici di } p(z,\cdot)\}$. Se $\deg_{z_n}p=d$, in generale le radici di $p(z,\cdot)$ sono d distinte eccetto dove si annulla $\Delta(z)$ discriminante di $p(z,\cdot)$ (risultante tra p e $\frac{\partial p}{\partial z_n}$).

Fuori da $\{\Delta=0\}$ ρ è un rivestimento topologico a d fogli, che si incollano sopra $\{\Delta=0\}$. È un rivestimento ramificato di un aperto di $\mathbb{C}^{n-1}$, ramificato sopra il luogo di zeri di una funzione olo..

Oss.: $\{f=0\}$ non contiene pti isolati.

Cor.: $\mathcal{O}_n$ è UFD.

Dim.: per induzione, $\mathcal{O}_{n-1}$ UFD $\xRightarrow{\text{Gauss}}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ UFD.

Se $f(0,z_n)\not\equiv0$, scriviamo $f=\underset{\mathcal{O}_n^*}{h}\,\underset{\mathcal{O}_{n-1}[z_n]}{p}$. Fattorizziamo p in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$:

$p=p_1\cdot\ldots\cdot p_m$, $p_j\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ irr.. Lo sono anche in $\mathcal{O}_n$ ($\Rightarrow f=h\cdot p_1\cdot\ldots\cdot p_m$ fattorizzazione in irr.): se $p_j=F_1F_2\in\mathcal{O}_n$, posso scrivere $F_1=H_1G_1$, $F_2=H_2G_2$, $H_1,H_2\in\mathcal{O}_n^*$, $G_1,G_2\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]\Rightarrow$

$\Rightarrow1\cdot p_j=\underset{\mathcal{O}_n^*}{(H_1H_2)}\cdot\underset{\mathcal{O}_{n-1}[z]}{(G_1G_2)}\underset{\text{unicità di W.}}{\Longrightarrow}H_1H_2=1$, $p_j=G_1G_2\Rightarrow$

$\Rightarrow G_1$ o G_2 invertibile $\Rightarrow F_1$ o F_2 invertibile.

Supponiamo $f=f_1\cdot\ldots\cdot f_k$, $f_j\in\mathcal{O}_n$ irr.. Scriviamo $f_j=\underset{\mathcal{O}_n^*}{\tilde h_j}\,\underset{\mathcal{O}_{n-1}[z_n]}{\tilde p_i}\Rightarrow$

$\Rightarrow\underset{\mathcal{O}_n^*}{h}\cdot\underset{\mathcal{O}_{n-1}[z_n]}{p_1\cdot\ldots\cdot p_m}=\underset{\mathcal{O}_n^*}{(\tilde h_1\cdot\ldots\cdot\tilde h_k)}\cdot\underset{\mathcal{O}_{n-1}[z_n]}{(\tilde p_1\cdot\ldots\cdot\tilde p_k)}\Rightarrow$

$\Rightarrow h=\tilde h_1\cdot\ldots\cdot\tilde h_k$, $p_1\cdot\ldots\cdot p_m=\tilde p_1\cdot\ldots\cdot\tilde p_k\Rightarrow k=m$ e i $\tilde p_i$ coincidono con i p_i a meno di invertibili. □

Oss.: in un UFD R, dati $u,v\in R[x]$ relativamente primi, $\exists\,0\neq\gamma\in R$ risultante di u e v e $\alpha,\beta\in R[x]$ t.c. $\alpha u+\beta v=\gamma$.

Prop. (propagazione dei germi coprimi): $f,\overset{\neq0}{g}\in\mathcal{O}_n$ rel. primi (non inv.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists\,\varepsilon>0$ t.c. $\forall\,|z|<\varepsilon$ f,g rimangono rel. primi in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z}$ (a patto di restare non inv.).

Dim.: $fg\not\equiv0\Rightarrow\exists$ retta su cui $f\not\equiv0$, $g\not\equiv0$; possiamo supporre $f,g\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. $f(0,z_n)\not\equiv0\Rightarrow\forall z$ piccolo, $f(z,z_n)\not\equiv0$ come funzione di z_n. $\alpha f_0+\beta g_0=\gamma$, $\alpha,\beta\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, $0\neq\gamma\in\mathcal{O}_{n-1}$.

Vale $\alpha f+\beta g=\gamma$ in un intorno di 0.

Sia z_0 t.c. $f(z_0)=g(z_0)=0$ e in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z_0}$ f_{z_0},g_{z_0} hanno un fattore comune h con $h(z_0)=0$. $h\mid f_{z_0},g_{z_0}\Rightarrow h\mid\gamma_{z_0}\Rightarrow h\in\mathcal{O}_{n-1}$ non dipende da z_n. $h(z_{0,1},\dots,z_{0,n-1},z_n)\equiv0\Rightarrow f(z_{0,1},\dots,z_{0,n-1},z_n)\equiv0$ in un intorno di 0, assurdo. □