Cor. (propagazione dei germi ridotti):
$f \in \mathcal{O}_n$ ridotto rimane ancora ridotto in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, z}$, $|z| < \varepsilon$ opportuno.
Dim.: $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ non ha fattori multipli $\Leftrightarrow p, \frac{\partial p}{\partial z_n}$ coprimi. $\square$

Oss.: non è vero che $f \in \mathcal{O}_n$ irr. rimane irr. in un intorno di 0.
Es.: $x^2 - zy^2$ irr. in 0, riducibile se $z \neq 0$.

Teo. (divisione di Weierstrass): fissato $0 \neq g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, $\deg_{z_n} g = d$, $\forall f \in \mathcal{O}_n \, \exists! \, h \in \mathcal{O}_n, r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, $\deg_{z_n} r < d$ t.c. $f = gh + r$.
Dim.: $h(z, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u| = \delta} \frac{f(z,u)}{g(z,u)} \frac{du}{u - z_n}$ è ben def. e olo.
se $|z| < \varepsilon$, $|z_n| < \delta$ sufficientemente piccoli.
$$r = f - gh = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \left(f(z,u) - \frac{g(z,z_n) f(z,u)}{g(z,u)} \right) \frac{du}{u - z_n} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z,u)}{g(z,u)} \underbrace{\left(\frac{g(z,u) - g(z,z_n)}{z - z_n} \right)}_{\text{polinomiale in } z_n \text{ di grado } < d} du.$$
L'unicità segue da $hg = r$, $h \in \mathcal{O}_n$, $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, $\deg_{z_n} r < d \Rightarrow$
$\Rightarrow r = h = 0$. $\square$

Cor. (Nullstellensatz debole): $f \in \mathcal{O}_n$ irr., $h \in \mathcal{O}_n$, h nullo su $\{f = 0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f | h$ in $\mathcal{O}_n$.
Dim.: supponiamo $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, $d = \deg_{z_n} f$. f irr. $\Rightarrow f, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ coprimi.
$\exists \, \alpha, \beta \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, $\gamma \in \mathcal{O}_{n-1}$ t.c. $\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial z_n} = \overset{\neq 0}{\gamma}$. Fissato $z = z_0$, $f(z_0, z_n) \in \mathbb{C}[z_n]$; se ha una radice w di molteplicità $m > 1$, $f(z_0, w) = 0 = \frac{\partial f}{\partial z_n}(z_0, w) \Rightarrow \gamma(z_0) = 0 \Rightarrow$ su $\{\gamma \neq 0\}$, $f(z_0, \cdot)$ ha d radici distinte. Scriviamo $h = fg + r$, $\deg_{z_n} r < d$.
Se $\gamma(z_0) \neq 0$, f ha d radici distinte, h ha d radici distinte $\Rightarrow$
$\Rightarrow r$ ha almeno d radici distinte $\Rightarrow r(z_0, \cdot) = 0 \Rightarrow r = 0$. $\square$

Cor.: $\mathcal{O}_n$ è noetheriano.
Dim.: $I \subset \mathcal{O}_n$ ideale non banale, fissiamo $0 \neq f \in I$. A meno di cambiare coordinate, $f = ph$, $h \in \mathcal{O}_n^*$, $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ ($\Rightarrow p \in I$).
Per induzione su n, $\mathcal{O}_{n-1}$ noeth. $\Rightarrow \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ noeth..
$I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è generato da $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. $\hat{f} \in I$, dividiamo per p, $\hat{f} = \hat{h} p + \hat{r}$, $\hat{r} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$; $\hat{f}, p \in I \Rightarrow \hat{r} \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{r} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_i g_i$, $\alpha_i \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{f} = \hat{h} p + \sum_{j=1}^{k} \alpha_i g_i \Rightarrow I$ è generato da $p, g_1, \dots, g_k$. $\square$

Def.: $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, $f : U \to \mathbb{C}^n$ è olomorfa se
$f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix}$ con $f_j : U \to \mathbb{C}$ olo. $\forall j = 1, \dots, m$.

Def.: una $\overbrace{\text{VARIETÀ COMPLESSA}}^{\text{di dim. } n}$ è una varietà differenziabile reale di dimensione $2n$ connessa (paracompatta, Hausdorff) che ammette un atlante di carte olomorfe (fissato), cioè $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di X (lo si può prendere loc. finito) con carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n \; \forall \alpha \in I$ (C^∞, ini., diffeo. con l'immagine, che è un aperto) t.c. $\forall \alpha, \beta \in I$ t.c. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ e $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ sono olomorfe su $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.
Es.: $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ (atlante $\{z_j \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n$), i loro aperti, le loro sottovarietà lisce connesse. $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} /_{z \sim 2z}$ è cpt ma non immergibile in $\mathbb{P}^N \; \forall N$.
$f : M \to N$ rivestimento, N varietà complessa $\Rightarrow \exists!$ struttura di var. complessa su M che rende f olomorfa. Si fa come per quelle reali.
Se M è var. complessa e gli automorfismi del rivestimento sono olo., $\exists!$ struttura di var. complessa su N che rende f olo.. Si fa come per quelle reali.

Tori complessi: $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ sottogruppo, $\underset{\hookrightarrow \text{reticolo}}{\Lambda} \cong \mathbb{Z}^k$, $\Lambda = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$, $\underline{v}_j$ lin. indi. su $\mathbb{R}$.
$T = \mathbb{C}^n / \Lambda$, $\pi : \mathbb{C}^n \to T$ riv. univ. con automorfismi le traslazioni per elementi di Λ. È var. comp., T cpt $\Leftrightarrow k = 2n$, non tutti immergibili in $\mathbb{P}^N$.
S superficie di Riemann (superficie reale, orientata (cpt)).
g metrica riemanniana su S, x_1, x_2 coordinate reali orientate su un aperto U. G matrice della metrica nella base $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$) ($\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ base ori. dei tangenti a S nei pti di U)
$G = (g_{ij}) = \left(g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)$ simmetrica e def. pos..
$\mu = \frac{g_{11} - g_{22} + 2i g_{12}}{\mathrm{tr}\, G + 2\sqrt{\det G}}$, $f : U \to \mathbb{C}$ è olo. se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow G = \underset{>0}{\lambda} I$.
Le coordinate per cui $G = \lambda I$ si dicono ISOTERME e tali coordinate $\exists$ nell'intorno di ogni pto e danno un atlante complesso per S.

Def.: M v.c. con atlante olo. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, $\emptyset \neq U \subseteq M$ aperto, $z_1, \dots, z_n : U \to \mathbb{C}$ si dicono COORDINATE OLOMORFE su U se $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} : U \to \mathbb{C}^n$ ini. e $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$ e $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ sono olo. su $z(U \cap U_\alpha)$ e $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$.
Es.: $\pi_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto z_j$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ carta dell'atlante olo., $\pi_1 \circ \varphi_\alpha, \dots, \pi_n \circ \varphi_\alpha$ sono coordinate olo. su U_α.
$z, \tilde{z}$ coordinate olo. $\Rightarrow z \circ \tilde{z}^{-1}$, $\tilde{z} \circ z^{-1}$ olo., cioè cambi di coord. olo. sono olo..
Def.: M v.c., $\emptyset \neq U \subseteq M$ aperto, $f : U \to \mathbb{C}$ si dice OLOMORFA se $\forall x \in U$ $\overset{\Rightarrow \forall}{\exists}$ coord. olo. $z_1, \dots, z_n$ in un intorno aperto $x \in V \subseteq U$ t.c. $f \circ z^{-1}$ è olo. su $z(V)$.
Def.: M, N v.c., $\dim M = m$, $\dim N = n$, $f : M \to N$ si dice OLOMORFA se $\forall x \in M$ $\overset{\Rightarrow \forall}{\exists}$ coord. olo. z su un intorno aperto V di x,
$\forall \Leftarrow \exists$ 〃 〃 w 〃 〃 〃 〃 W 〃 $f(x)$, $f(V) \subseteq W$
t.c. $w \circ f \circ z^{-1}$ è olo. su $z(V)$.
f si dice BIOLOMORFISMO se è invertibile e f^{-1} olo..
Es.: $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[z_0, z_1] \mapsto [(z_0 - z_1)^3, z_0^2 z_1] = [w_0, w_1]$ è olo..