Def.: $M$ v.c., $\mathcal{O}_M$ è il fascio dei germi delle funzioni olo. su $M$.
$\emptyset \neq U \subseteq M$ aperto con coordinate olo. $(z_1, \dots, z_n) = z$, allora
$\Gamma(U, \mathcal{O}_M) \cong \Gamma(z(U), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$, cioè $\mathcal{O}_M$ è loc. isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$.

- $\mathcal{O}_M$ non contiene germi di funzioni reali o di modulo cost. (eccetto i germi cost.);
- $\mathcal{O}_M$ è Hausdorff (vale il principio di identità);
- vale massimo modulo;
- estensione di funzioni olo. $\begin{cases} \text{su pti isolati se } n \geq 2 \\ \text{su luoghi di zeri di funzioni olo. per le limitate} \end{cases}$;
- le spighe di $\mathcal{O}_M$ sono anelli noetheriani, locali, UFD;
- NSS debole;
- propagazione dei germi coprimi e ridotti.

$M$ v.c. cpt:

1) $\Gamma(M, \mathcal{O}_M) = \mathbb{C}$ ($f$ olo. globale $\Rightarrow |f| : M \to \mathbb{C}$ ammette massimo);
2) se $M \subseteq \mathbb{C}^n$, $M = \{\text{pto}\}$ (le coordinate di $\mathbb{C}^n$ ristrette a $M$ danno funzioni olo. globali);
3) $\dim M \geq 1 \Rightarrow M$ non si immerge (tramite un biolo. con l'immagine) in $\mathbb{C}^N$ $\forall N$ (forse in $\mathbb{P}^N$...).

Oss.: dare $\mathcal{O}_M$ è come dare la struttura complessa su $M$.
$M$ varietà diff., $\mathcal{A} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{C})$ sottofascio di anelli loc. isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ ($\forall p \in M$ $\exists p \in U \subseteq M$ aperto diffeomorfo a $V \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto tramite $\varphi : U \to V$ t.c. $\mathcal{A}_{|U} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n|V}$ tramite composizione con $\varphi$); l'atlante olo. è dato dai diffeo. $z : \underset{M}{U} \xrightarrow{\text{aperti}} \underset{\mathbb{C}^n}{V}$ t.c. $\forall f \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ $f \circ z^{-1} : V \to \mathbb{C}^n$ è olo..

Def.: $V \subseteq M$ è una sottovarietà ANALITICA se $\forall p \in M$ $\exists p \in U \subseteq M$ aperto, $f_\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{O}_M)$, $\alpha \in I$ t.c. $V \cap U = \bigcup_{\alpha \in I} \{f_\alpha = 0\}$ ($\Rightarrow V$ chiuso).

- $\mathcal{O}_{M,p}$ noetheriano $\Rightarrow$ basta $I$ finito;
- $V$ si dice IPERSUPERFICIE ANALITICA se si può scegliere $\#I = 1$ in ogni pto;
- $V$ si dice IRRIDUCIBILE se $V = V_1 \cup V_2$, $V_i$ s.v.a. $\Rightarrow V = V_1$ o $V = V_2$.

Es.: $\{y^2 - x^2(x-1) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$.

- $p \in V$, $V$ si dice IRRIDUCIBILE in $p$ se $\forall p \in U \subseteq M$ aperto $\exists p \in W \subseteq U$ aperto t.c. $V \cap W$ è irr.;
- $V$ ipersuperficie è irr. in $p \Longleftrightarrow$ in un intorno di $p$ $V = \{f = 0\}$ con $f \in \mathcal{O}_{M,p}$ irr.:

  ($\Leftarrow$) se in un intorno di $p$ $V = V_1 \cup V_2$ s.v.a., se fosse $V_1 \not\subset V_2$, $V_2 \not\subset V_1$, $\exists f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{M,p}$ t.c. $f_1 \equiv 0$ su $V_1$ ma non su $V_2$ e viceversa $\Rightarrow f_1 f_2 \equiv 0$ su $V = \{f = 0\} \overset{NSS}{\Longrightarrow} f \mid f_1 f_2$ in $\mathcal{O}_{M,p} \Rightarrow$
  $\Rightarrow f \mid f_1$ o $f \mid f_2 \Rightarrow V \subset \{f_1 = 0\}$ o $V \subset \{f_2 = 0\} \Rightarrow$
  $\Rightarrow V_2 \not\subset V$ o $V_1 \not\subset V$, assurdo $\Rightarrow V_1 \subset V_2$ o $V_2 \subset V_1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow V = V_2$ o $V = V_1$;

  ($\Rightarrow$) loc. in $p$, $V = \{g = 0\}$, $g \in \mathcal{O}_{M,p}$; fattorizziamo $g$ in $\mathcal{O}_{M,p}$, $g = f_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot f_m^{k_m}$, $f_i \in \mathcal{O}_{M,p}$ irr. distinti $\Rightarrow$
  $\Rightarrow V \overset{\text{loc. in } p}{=} \bigcup_{i=1}^{m} \{f_i = 0\} \overset{V \text{ irr. in } p}{\Longrightarrow} \exists j$ t.c. $V = \{f_j = 0\}$
  ($\{f_i = 0\} \subseteq \{f_j = 0\} \overset{NSS}{\Rightarrow} f_i \mid f_j \Rightarrow m = 1$);
- $V$ s.v.a. è loc. unione di un numero finito di s.v.a. irr. ($\mathcal{O}_{M,p}$ UFD);
- $V$ è loc. rivestimento ramificato di un aperto di $\mathbb{C}^k$, ramificato sul luogo di zeri di una funzione olo..

Teo. (proper mapping): $f : M \to N$ olo. tra v.c., $V \subseteq M$ s.v.a. t.c. $f_{|V}$ è propria. Allora $f(V)$ e s.v.a. di $N$. Dim.: no. $\square$

Def.: $S \subset M$ si dice SOTTOVARIETÀ COMPLESSA se $\exists k \geq 0$ t.c. $\forall p \in S$ $\exists p \in U \subseteq M$ aperto con coordinate olo. $z = (z_1, \dots, z_n)$ $z(S \cap U) = z(U) \cap \mathbb{C}^k$, $\mathbb{C}^k = \{z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$.

Oss.:
- se $S$ è connessa è una v.c. di dim. $k$ (con coordinate olo. su $U \cap S$ $z_1, \dots, z_k$);
- $S$ è loc. biolo. a un aperto di $\mathbb{C}^k$;
- $S$ è loc. luogo di zeri di $n-k$ funzioni olo. $(z_{k+1}, \dots, z_n)$.

$M$ v.c., $\dim M = n$, $p \in M$, coordinate olo. $z_1, \dots, z_n$ in un intorno di $p$, $z_j = x_j + i y_j$, $j = 1, \dots, n$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sono coordinate $C^\infty$ in un intorno di $p$ (di $M$ come var. diff.).

Lo SPAZIO TANGENTE REALE di $M$ in $p$ è
$$T_{\mathbb{R},p}(M) = \{\mathbb{R}\text{-derivazioni di } C^\infty(M, \mathbb{R})_p\} =$$
$\hookrightarrow D : C^\infty(M, \mathbb{R})_p \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare t.c. $D(fg) = D(f) g(p) + f(p) D(g)$
$$= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\},$$
$\frac{\partial}{\partial x_j} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$, $\frac{\partial}{\partial y_j}$ analogo.

Lo spazio tangente COMPLESSIFICATO a $M$ in $p$ è
$$T_{\mathbb{C},p}(M) = T_{\mathbb{R},p}(M) \otimes \mathbb{C} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\} =$$
$$= \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right\} =$$
$$= \underbrace{\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}}_{= T'_p(M)} \oplus \underbrace{\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right\}}_{= T''_p(M)}.$$
$T'_p(M)$: spazio tangente olomorfo a $M$ in $p$; $T''_p(M)$: spazio tangente anti-olomorfo a $M$ in $p$.

$T_{\mathbb{C},p}(M) = \{\mathbb{C}\text{-derivazioni di } C^\infty(M, \mathbb{C})_p\}$,
$T''_p(M) = \{$ " " " nulle sulle funzioni olo.$\}$
$T'_p(M) = \{$ " " " " " " anti-olo.$\}$.
($\bar{f}$ olo.)

Estendiamo a $T_{\mathbb{C},p}(M)$ il coniugio su $\mathbb{C}$,
$\bar{\ } : T_{\mathbb{C},p}(M) \to T_{\mathbb{C},p}(M)$ $\mathbb{R}$-lineare, $\mathbb{C}$-antilineare, $\bar{\ }^2 = id$, $\overline{\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$.
$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}_j}$, $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_j}$.

L'autospazio di $\bar{\ }$ relativo all'autovalore $1$ è $T_{\mathbb{R},p}(M)$.

$T_{\mathbb{R},p}(M) \hookrightarrow T_{\mathbb{C},p}(M) \xrightarrow{\pi_1} T'_p(M)$ è isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare.
$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto \frac{\partial}{\partial z_j}$$
$$\frac{\partial}{\partial y_j} \longmapsto i \frac{\partial}{\partial z_j}$$

Es.: $(x(t), y(t)) = p(t)$ curva in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $z(t) = x(t) + i y(t)$;
il vettore tangente in $t$ è $\underset{T_{\mathbb{R},p(t)}(\mathbb{C})}{\frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y}} \mapsto \underset{T'_{p(t)}(\mathbb{C})}{\frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z}}$.

$f : M^m \to N^n$ $C^\infty$ tra v.c., $\forall p \in M$ $f$ induce
$df_p : T_{\mathbb{R},p}(M) \to T_{\mathbb{R},f(p)}(N)$ $\mathbb{R}$-lineare.
$z_j = x_j + i y_j$ coordinate olo. in un intorno di $p$,
$w_k = u_k + i v_k$ " " " " " " $f(p)$ $(w = f(z))$,
$$df_p : \frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial v_k}.$$
Complessificando, $f$ induce $df_p : T_{\mathbb{C},p}(M) \to T_{\mathbb{C},f(p)}(N)$ $\mathbb{C}$-lineare (stessa formula), $df_p : \frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial z_j}(p) \frac{\partial}{\partial w_k} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial \bar{w}_k}{\partial z_j}(p)}_{= \overline{\left(\frac{\partial w_k}{\partial \bar{z}_j}\right)}(p)} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k}$.

$f$ è olo. in $p \Longleftrightarrow df_p(T'_p(M)) \subseteq T'_{f(p)}(N)$, $df_p(T''_p(M)) \subseteq T''_{f(p)}(N)$.

In termini delle basi $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}, \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n} \right\}$ la matrice di $df_p$ è
$$J_{\mathbb{R},p}(f) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p) & \frac{\partial u_k}{\partial y_j}(p) \\ \hline \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(p) & \frac{\partial v_k}{\partial y_j}(p) \end{array} \right)$$ jacobiano reale di $f$ in $p$.

$$J_{\mathbb{C},p}(f) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \bar{B} & \bar{A} \end{array} \right),$$ $B = 0$ se $f$ olo..