$$J_{\mathbb{C},p}(f)=\left(\begin{array}{c|c}\frac{\partial w_i}{\partial z_j} & \frac{\partial w_i}{\partial \bar z_j}\\ \hline \frac{\partial \bar w_i}{\partial z_j} & \frac{\partial \bar w_i}{\partial \bar z_j}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline \bar B & \bar A\end{array}\right),$$

$A=J_p(f)$ jacobiano olomorfo in p di f.

Se f olo., $J_{\mathbb{C},p}(f)=\left(\begin{array}{c|c}J_p(f) & 0\\ \hline 0 & \overline{J_p(f)}\end{array}\right)$. Vale il viceversa.

$\mathrm{rk}\, J_{\mathbb{R},p}(f)=\mathrm{rk}\, J_{\mathbb{C},p}(f)=2\,\mathrm{rk}\, J_p(f)$.

Se $m=n$, $\det(J_{\mathbb{R},p}(f))=\det(J_{\mathbb{C},p}(f))=|\det(J_p(f))|^2\geq 0$.

Applicato ai cambi di carta per un atlante olo., M v.c. è orientabile.

Di più: M è orientata. Su $\mathbb{C}^n$ l'orientazione naturale è data dalla $2n$-forma $\eta=dx_1\wedge dy_1\wedge\ldots\wedge dx_n\wedge dy_n=\left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1\wedge d\bar z_1\wedge\ldots\wedge dz_n\wedge d\bar z_n$.

L'orientazione su M è data dalla $2n$-forma ottenuta dal pull-back di η tramite le carte dell'atlante olo. (loc. finito) incollate da una partizione dell'unità C^∞ subordinata all'atlante.

Teo. (funzioni implicite olo.): $f_1,\ldots,f_k\in\mathcal{O}_n$ t.c.
$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\neq 0\Rightarrow\exists\, w_1,\ldots,w_k\in\mathcal{O}_{n-k}$ t.c. in un intorno di 0

$0=f_1(z)=\ldots=f_n(z)\Longleftrightarrow z_i=w_i(z_{k+1},\ldots,z_n)\ \forall i=1,\ldots,k$.

Dim.: $z_j=x_j+iy_j$. Caso C^∞: $\det\left(\begin{array}{c|c}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\\ \hline \frac{\partial \bar f_i}{\partial x_j} & \frac{\partial \bar f_i}{\partial y_j}\end{array}\right)_{i,j=1,\ldots,k}=$

$=\det\left(\begin{array}{c|c}\frac{\partial f_i}{\partial z_j} & 0\\ \hline 0 & \frac{\partial \bar f_i}{\partial \bar z_j}\end{array}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\neq 0$ in $0\Rightarrow\exists\, w_1,\ldots,w_k\in C^\infty_{n-k}$ t.c.

$0=f_1(z)=\ldots=f_n(z)\Longleftrightarrow z_j=w_j(z_{k+1},\ldots,z_n,\bar z_{k+1},\ldots,\bar z_n)\ \forall j=1,\ldots,k$

in un intorno di 0.

$f_h(w_1(z,\bar z),\ldots,w_k(z,\bar z),z_{k+1},\ldots,z_n)$,

comunque non ci sarebbe, ma se vuoi dargli un senso vedi le dispense

$$0=\frac{\partial f_h}{\partial \bar z_\alpha}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_h}{\partial z_j}\frac{\partial w_j}{\partial \bar z_\alpha}+\sum_{j=1}^n\underbrace{\frac{\partial f_h}{\partial \bar z_j}}_{=0}\frac{\partial \bar w_j}{\partial \bar z_\alpha}+\underbrace{\frac{\partial f_h}{\partial \bar z_\alpha}}_{=0};$$

punto per punto è un sistema lineare con matrice invertibile $\Rightarrow\frac{\partial w_j}{\partial \bar z_\alpha}(p)=0\ \forall p\Rightarrow w_j$ olo.. $\square$

Teo. (funzioni inverse olo.): $f:U\to V$ olo. fra aperti di $\mathbb{C}^n$, $p\in U$ t.c. $J_p(f)$ è invertibile. Allora f è loc. invertibile in p con inversa olo..

Dim.: $\det(J_{\mathbb{R},p}(f))=|\det(J_p(f))|^2\neq 0\xRightarrow{\text{caso } C^\infty} f$ é loc. invertibile in p con inversa C^∞.

$f^{-1}=f^{-1}(w,\bar w)$, $f^{-1}(f(z))=z\ \forall z$.

$$0\equiv\frac{\partial (f^{-1})_i}{\partial \bar z_\alpha}(f(z))=\sum_{j=1}^n\frac{\partial (f^{-1})_i}{\partial w_j}\underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial \bar z_\alpha}}_{=0}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial (f^{-1})_i}{\partial \bar w_j}\underbrace{\frac{\partial \bar f_j}{\partial \bar z_\alpha}}_{=\overline{\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_\alpha}\right)}},$$

Si conclude come sopra. $\square$

$f:U\to V$ olo. tra aperti di $\mathbb{C}^n$ ini. $\Rightarrow\det(J_p(f))\neq 0\ \forall p\in U$ ($\Rightarrow$ $\Rightarrow f^{-1}$ olo.).

Dim.: induzione su n. $n=1$ ok.

$p\in U$, $k=\mathrm{rk}(J_p(f))$. Supponiamo $0<k<n$. WLOG $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=1,\ldots,k}$ invertibile.

$z'_j=\begin{cases}f_j(z) & \text{se } j=1,\ldots,k\\ z_j & \text{se } j=k+1,\ldots,n\end{cases}$. Funzione inversa $\Rightarrow$

$\Rightarrow z'_1,\ldots,z'_n$ sono coordinate olo. in p.

$C=\{z'_1=\ldots=z'_k=0\}\xhookrightarrow{f}\{w_1=\ldots=w_k=0\}$.

$w_j=w_j(z)$, in queste coordinate $J_p(f)=\left(\begin{array}{c|c}I & 0\\ \hline B & A\end{array}\right)$, $A=J_p(f_{|C})$ che quindi non sarebbe invertibile, assurdo.

Allora $k=0$ o $k=n\Rightarrow\det(J_p(f))=0\Longleftrightarrow J_p(f)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ é loc. cost. su $\{\det(J_p(f))=0\}$. Se è $\neq\emptyset$, è luogo di zeri di una funzione olo. $\Rightarrow$ no pti isolati $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ non ini., assurdo. $\square$

Sia $S\subseteq M$ sottovar. comp. di dim. k è localmente

- immagine di un aperto $U\subseteq\mathbb{C}^k$ tramite $\varphi:U\to M$ olo. con $\mathrm{rk}(J_p(\varphi))=k\ \forall p\in U$ o
- luogo di zeri di $n-k$ funzioni olo. (su V) $F=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_{n-k}\end{pmatrix}:V\to\mathbb{C}^k$ t.c. $\mathrm{rk}(J_p(F))=n-k\ \forall p\in V$.

Def.: $V\subseteq M$ sottovar. analitica; $p\in V$ si dice LISCIO o NON SINGOLARE se in un intorno di p V è loc. luogo di zeri di $n-k$ funzioni olo. con $\mathrm{rk}\, J_p=n-k$ (V è loc. in p sottovar. comp. di dim. k).

$V^*=\{\text{pti lisci}\}$.

- $V^*\neq\emptyset$, V^S sottovar. analitica propria; ($V^S\to$ pti singolari)
- V sottovar. comp. $\Longleftrightarrow V=V^*$ ed è connessa;
- V^* é unione disgiunta di sottovar. comp.;
- se V^* connessa, $\dim V:=\dim V^*$;
- V irr. $\Longleftrightarrow V^*$ connessa;
- $p\in V^*\Rightarrow V$ è irr. in p.

Es.: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$, $z\mapsto(z^2,z^3)$, $\mathrm{Im}\, f=\{g=z_1^3-z_2^2=0\}$, $J_p(g)=\begin{pmatrix}3z_1^2\\ -2z_2\end{pmatrix}$,

$V^*=f(\mathbb{C}^*)$, V irr..

$\{z_1^m-z_2^n=0\}$ irr. $\Longleftrightarrow(m,n)=1$.

Funzioni meromorfe

M v.c., $U\subseteq M$ aperto, $U=\bigcup_{i\in I}U_i$ (cc di U). $\Gamma(U,\mathcal{O}_M)=\bigtimes_{i\in I}\Gamma(U_i,\mathcal{O}_M)$.

$\Gamma(U_i,\mathcal{O}_M)$ sono domini $\rightsquigarrow\mathrm{Quot}(\Gamma(U_i,\mathcal{O}_M))=\left\{\frac{f}{g}\,\middle|\, f,g\in\Gamma(U_i,\mathcal{O}_M), g\not\equiv 0\right\}/\sim$,

è un campo

$\frac{f}{g}\sim\frac{f'}{g'}\Longleftrightarrow fg'=f'g$.

Il prefascio $\mathcal{M}_M:U\longmapsto\bigtimes_{i\in I}\mathrm{Quot}(\Gamma(U_i,\mathcal{O}_M))$ è non canonico.

$\mathfrak{M}_M=\mathrm{Sheaf}(\mathcal{M}_M)$ fascio dei germi delle funzioni meromorfe su M.

$\mathfrak{M}^*_M$ fascio dei germi delle funzioni mero. non identicamente nulle $\left(\frac{f}{g}, f\not\equiv 0\right)$.

$U\subseteq M$ aperto, una funzione meromorfa F su U è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di U (U_α conn.), $\forall\alpha\in I$ $f_\alpha, g_\alpha\not\equiv 0\in\Gamma(U_\alpha,\mathcal{O}_M)$ t.c. $\forall\alpha,\beta\in I$ con $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ su $U_\alpha\cap U_\beta$ si ha $f_\alpha g_\beta=f_\beta g_\alpha$.

$F=\frac{f_\alpha}{g_\alpha}$, $F'=\frac{f'_\beta}{g'_\beta}\in\Gamma(U,\mathfrak{M}_M)$ sono uguali se $f_\alpha g'_\beta=f'_\beta g_\alpha$ su $U_\alpha\cap U'_\beta$.

$\mathcal{O}_M\hookrightarrow\mathfrak{M}_M$, $\mathcal{O}^*_M\hookrightarrow\mathfrak{M}^*_M$ sottofasci.
$f\longmapsto\frac{f}{1}$

Def.: $V\subseteq M$ ipersuperficie analitica, $p\in M$. $\exists\, p\in U\subseteq M$ aperto, $h\in\Gamma(U,\mathcal{O}_M)$ t.c. $\{h=0\}=V\cap U$ e $\forall g\in\Gamma(U,\mathcal{O}_M)$ nulla su $V\cap U$ $h|g$ in $\mathcal{O}_{M,q}\ \forall q\in U$; é la funzione di definizione locale di V in p (f. d. l.).

V loc. in p è $\{f=0\}$, $f\in\mathcal{O}_{M,p}$, $f=f_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot f_n^{k_n}$, $f_i\in\mathcal{O}_{M,p}$ irr. distinti, $h=f_1\cdot\ldots\cdot f_n$, unica a meno di invertibili.

Se $p\in V^*$, h è irr. in $\mathcal{O}_{M,p}$.

Oss.: h dà f.d.l. per V in tutti i pti di U.

Def.: $V\subseteq M$ ipersuperficie analitica irr., $p\in V^*$, $h\in\mathcal{O}_{M,p}$ f.d.l. di V in p.
$F\in\mathcal{O}_{M,p}$, $\mathrm{ord}_{p,V}(F)$ ordine di annullamento di F in p lungo V è $\max\{a\in\mathbb{N}\mid F=h^aG \text{ in } \mathcal{O}_{M,p}\}$ ben def. e non dipende da h.

$F=h^aG$ su un intorno di p,
h f.d.l. " " " " ", i germi coprimi h, G restano coprimi " " " " " $\Rightarrow p\longmapsto\mathrm{ord}_{p,V}(F)$ è loc. cost., ma V^* conn. $\Rightarrow$ è ben def. $\mathrm{ord}_V(F)$ ordine di annullamento di F lungo V (per F olo. in un intorno di V).

$\mathrm{ord}_V(F\cdot G)=\mathrm{ord}_V(F)+\mathrm{ord}_V(G)$.

F mero. in un intorno di V, $p\in V^*$, $F=\frac{f}{g}$ loc. in p.

$\mathrm{ord}_{p,V}(F)=\mathrm{ord}_{p,V}(f)-\mathrm{ord}_{p,V}(g)$.

Se $F=\frac{f'}{g'}$, $gf'=g'f\Rightarrow\mathrm{ord}_{p,V}(F)$ è ben def..
semplici verifiche