$F \in \Gamma(U, \mathcal{M}_M)$, $a = \mathrm{ord}_V(F)$,
se $a > 0$ V si dice «zero» di F di ordine a,
" $a < 0$ " " " «polo» " " " " $-a$.

Def.: un DIVISORE su M è una somma loc. finita
$D = \sum_{i \in I} a_i V_i$, $(0 \neq) a_i \in \mathbb{Z}$, V_i ipersuperficie analitica irr.
($\forall p \in M$ $\exists$ $p \in U \subseteq M$ aperto t.c. U interseca finiti V_i).
I divisori danno $\mathrm{Div}(M)$ gruppo abeliano.
$D \in \mathrm{Div}(M)$ si dice EFFETTIVO, $D \geq 0$, se $D = \sum_{i \in I} a_i V_i$ con $a_i \geq 0$.
Ogni divisore è differenza di due effettivi.
Def.: $F \in \Gamma(M, \mathcal{M}_M^*)$ (meromorfa, globale, non $\equiv 0$),
poniamo $(F) \in \mathrm{Div}(M) = \sum_{\substack{V \subseteq M \\ \text{ipersuperficie} \\ \text{analitica irr.}}} \mathrm{ord}_V(F) V$ divisore associato a F.
La somma è loc. finita per come sono fatti i luoghi di zeri di funzioni olo..
Otteniamo $(\ ): \Gamma(M, \mathcal{M}_M^*) \to \mathrm{Div}(M)$ omomorfismo di gruppi abel..
Oss.: F è olo. $\Longleftrightarrow (F) \geq 0$.
$\mathrm{Ker}(\ ) = \Gamma(M, \mathcal{O}_M^*)$.

$1 \to \mathcal{O}_M^* \to \mathcal{M}_M^* \to \mathcal{M}_M^*/\mathcal{O}_M^* \to 1$ esatta di fasci di g.a. su M $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 \to \underset{\Gamma(M, \mathcal{O}_M^*)}{\overset{\shortparallel}{H^0(M, \mathcal{O}_M^*)}} \to \underset{\Gamma(M, \mathcal{M}_M^*)}{\overset{\shortparallel}{H^0(M, \mathcal{M}_M^*)}} \xrightarrow{(\ )} \underset{\mathrm{Div}(M)}{\overset{\wr\shortparallel}{H^0(M, \mathcal{M}_M^*/\mathcal{O}_M^*)}} \to H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \to \dots$$
esatta.

$\mathrm{Div}(M) \ni D = \sum_i a_i V_i$; sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di M t.c.
su U_α ogni V_i ha f.d.l. $h_{i,\alpha} \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_M)$. Poniamo
$h_\alpha = \prod_i h_{i,\alpha}^{a_i} \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}_M^*)$ funzione di definizione locale di D su U_α.
↳ loc. finito
Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, su $U_\alpha \cap U_\beta$ $h_{i,\alpha} = h_{i,\beta} \cdot f_{i,\alpha\beta}$, $f_{i,\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_M^*)$.
$h_\alpha = h_\beta \underbrace{\left(\prod_i f_{i,\alpha\beta}^{a_i}\right)}_{\in\, \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_M^*)}$ $\Rightarrow$ le $\{h_\alpha\}$ danno una sezione globale di $\mathcal{M}_M^*/\mathcal{O}_M^*$.

$f \in \Gamma(M, \mathcal{M}_M^*/\mathcal{O}_M^*)$ è il dato di un ricoprimento aperto di M $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$
e $\forall \alpha \in I$ $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}_M^*)$ t.c. su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_M^*)$.
$\forall V \subseteq M$ ipersuperficie analitica irr. $\mathrm{ord}_{V \cap U_\alpha}(f_\alpha) = \mathrm{ord}_{V \cap U_\beta}(f_\beta)$.
Sia $\mathrm{Div}(M) \ni D = \sum_{\substack{V \subseteq M \\ \text{ipersuperficie} \\ \text{analitica irr.}}} \mathrm{ord}_{V \cap U_\alpha}(f_\alpha)$ dove $\forall V$ scelgo U_α t.c. $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$.

Le due mappe sono una l'inversa dell'altra e omomorfismi di gruppi abel..

$$1 \to H^0(M, \mathcal{O}_M^*) \to H^0(M, \mathcal{M}_M^*) \to \mathrm{Div}(M) \to \underset{\mathrm{Pic}(M)}{\overset{\shortparallel}{H^1(M, \mathcal{O}_M^*)}} \to \dots$$

Def.: M var. comp., un FIBRATO VETTORIALE COMPLESSO $\overbrace{}^{\text{di rango } k}$ su M è
una coppia (E, π), E var. diff., $\pi: E \to M$ C^∞ suri. t.c.
$\forall x \in M$ $E_x = \pi^{-1}(x)$ è s.v. su $\mathbb{C}$ di dim. k e π è loc. banale,
↳ fibra di E su x
$\forall x \in M$ $\exists x \in U \subseteq M$ aperto e un diffeo. $\varphi_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$
e $\forall y \in U$ $\varphi_y: E_y \to \{y\} \times \mathbb{C}^k$ isomorfismo
$\mathbb{C}$-lineare.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{C}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

φ_U si dice BANALIZZAZIONE di E su U,
π proiezione, E spazio totale, M base.
Un morfismo di fibrati complessi su M è $F: E_1 \to E_2$ C^∞ e
$\forall x \in M$ $F_x: E_{1,x} \to E_{2,x}$ $\mathbb{C}$-lineare e

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

F si dice isomorfismo se ogni F_x è iso..
Es.: - $E = M \times \mathbb{C}^k$. Se E è isomorfo a $M \times \mathbb{C}^k$ si dice BANALE;
- il fibrato tangente complesso $T_\mathbb{C}(M) = \bigcup_{p \in M} T_{\mathbb{C},p}(M)$.
Se su $U \subseteq M$ aperto ho coordinate olo. $z_1, \dots, z_m$, $T_\mathbb{C}(M)$ su U è banalizzato dalle basi $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}$;
- il fibrato cotangente complesso $T_\mathbb{C}^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_{\mathbb{C},p}^*(M)$ banalizzato da $dz_1, \dots, dz_m, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_m$;
- $T'(M)$ fibrato olo. tangente banalizzato da $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}$;
- $T''(M)$ " anti-olo. " " " $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}$;
- $(T')^*(M)$ ..., $(T'')^*(M)$ ....

$C = \pi^{-1}(U \cap V)$, $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}: \varphi_V(C) \to \varphi_U(C)$; otteniamo
$\varphi_V(C) = \varphi_U(C) = (U \cap V) \times \mathbb{C}^k$
$(x, v) \mapsto (x, \underbrace{g_{UV}(x)}_{\text{isomorfismo di } \mathbb{C}^k\ \mathbb{C}\text{-lineare}}(v))$

$g_{UV}: U \cap V \to GL(k, \mathbb{C})$ C^∞ FUNZIONE DI TRANSIZIONE (f.d.t.)
di E tra U e V.
Le f.d.t. soddisfano a

$$\circledast \begin{cases} g_{UV}(x) \circ g_{VU}(x) = id_{\mathbb{C}^k} \ \forall x \in U \cap V \\ g_{UV}(x) \circ g_{VW}(x) \circ g_{WU}(x) = id_{\mathbb{C}^k} \ \forall x \in U \cap V \cap W \end{cases} \Rightarrow g_{UU}(x) = id_{\mathbb{C}^k} \ \forall x \in U.$$

Se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di M e su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ho
$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{C})$ C^∞ t.c. vale $\circledast$, posso costruire un fibrato
$E = \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbb{C}^k /_\sim$ $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \ni (x, v) \sim (y, w) \in U_\beta \times \mathbb{C}^k \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x = y$, $w = g_{\alpha\beta}(x)(v)$.
La struttura di var. diff. su E è data dalle inclusioni degli aperti $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \hookrightarrow E$ $\Rightarrow$ E è fibrato comp. su M con f.d.t. $g_{\alpha\beta}$ tra U_α e U_β; le f.d.t. di un fibrato comp. definiscono il fibrato (a meno di isomorfismi).
Due fibrati comp. su M (E, π), (E', π') sono isomorfi $\Longleftrightarrow$ le f.d.t. $g_{\alpha\beta}$, $g'_{\alpha\beta}$ relative a un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M sono legate da $g'_{\alpha\beta} \underset{\text{su } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}{=} F_\alpha g_{\alpha\beta} F_\beta^{-1}$, $F_\alpha: U_\alpha \to GL(k, \mathbb{C})$ C^∞.

$f: E \to E'$ isomorfismo di fibrati comp., U_α, $F_\alpha: U_\alpha \to GL(k, \mathbb{C})$ C^∞.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_{U_\alpha}"] \arrow[d, "f"] & U_\alpha \times \mathbb{C}^k \arrow[d, "(id, F_\alpha)"] \\ (\pi')^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi'_{U_\alpha}"] & U_\alpha \times \mathbb{C}^k \end{tikzcd}$$

Su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $g'_{\alpha\beta}$ è la seconda componente
di $\varphi'_{U_\alpha} \circ (\varphi'_{U_\beta})^{-1}$, cioè $F_\alpha(\underbrace{\varphi_{U_\alpha} f^{-1} f \varphi_{U_\beta}^{-1}}_{\text{seconda componente}}) F_\beta^{-1} = F_\alpha g_{\alpha\beta} F_\beta^{-1}$.

Viceversa, su $\pi^{-1}(U_\alpha)$ poniamo $f = (\varphi'_{U_\alpha})^{-1}(id, F_\alpha)\varphi_{U_\alpha}$.
Su $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$ è uguale a $(\varphi'_{U_\beta})^{-1}(id, F_\beta)\varphi_{U_\beta}$.
f è un isomorfismo tra E e E'.
Per il fibrato prodotto, $g_{\alpha\beta} = id$. Se E è banale, allora le f.d.t. di E sono del tipo $g_{\alpha\beta} = F_\alpha \circ F_\beta^{-1}$.

$\mathbb{P}^1_{x_0, x_1} = U_0 \cup U_1$, $U_i = \{x_i \neq 0\}$. $U_0 = \mathbb{C}$ con coordinata $x = x_1/x_0$,
$U_1 = \mathbb{C}$ " " $y = x_0/x_1$,
su $U_0 \cap U_1$ $x = 1/y$. Il fibrato di rango 1 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ ha f.d.t.
$g_{00} = g_{11} = 1$, $g_{01} = g_{10}^{-1} = \frac{1}{g_{10}}$, $g_{10}: U_0 \cap U_1 \to \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$.
$[x_0, x_1] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^k$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) = \left((U_0 \times \mathbb{C}) \sqcup (U_1 \times \mathbb{C})\right)/_\sim$, $[x_0, x_1] \in U_0 \cap U_1$,
$U_0 \times \mathbb{C} \ni ([x_0, x_1], v) \sim ([x_0, x_1], \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^k v) \in U_1 \times \mathbb{C}$.
Allo stesso modo, su $\mathbb{P}^n_{x_0, \dots, x_k} = \bigcup_{i=0}^n U_i$ ho $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ che ha f.d.t.
↳ rango 1
$g_{U_i U_j} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^k$.
Oss.: $k = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$.