$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ricoprimento aperto di M banalizzante E fibrato in rette,

$g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ C^∞ (mai nulla),

danno una 1-cocatena Δ di Čech di $(C^\infty_M)^*$.

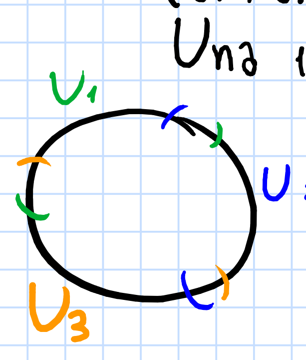
$(\delta\Delta)_{UVW} = g_{VW}\circ g_{UW}^{-1}\circ g_{UV} = 1 \Rightarrow \Delta$ è un 1-cociclo e definisce una classe in $H^1(M,(C^\infty_M)^*)$.

Se E' è fibrato in rette su M, è isomorfo a $E \Leftrightarrow g'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha g_{\alpha\beta}\lambda_\beta^{-1} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} g_{\alpha\beta}$, $\lambda_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ C^∞ 0-cocatena di Čech λ di $(C^\infty_M)^*$,

$(\delta\lambda)_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} \Rightarrow g_{\alpha\beta} = \delta(\lambda) g'_{\alpha\beta}$, cioè i due cocicli differiscono per un cobordo $\Rightarrow$ la classe in $H^1(M,(C^\infty_M)^*)$ è la stessa.

$$\underbrace{H^1(M,(C^\infty_M)^*) \longleftrightarrow}_{\text{isomorfismo di gruppi abeliani}} \underbrace{\{\text{classi di isomorfismo di fibrati in rette su } M\}}_{\text{gruppo abeliano}}$$

Es.: S^1, $H^1(S^1,(C^\infty_{S^1})^*) = \{1\} \Rightarrow$ tutti i fibrati in rette (di rango 2 su $\mathbb{R}$) su S^1 sono banali.



Una 1-cocatena σ di $(C^\infty_{S^1})^*$ è $\sigma_{ij}: U_i\cap U_j \to \mathbb{C}^*$ C^∞

$\delta\sigma = 1 \Rightarrow \sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=1$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}^{-1}$ se $i\neq j \Rightarrow$

$\Rightarrow$ per descrivere σ bastano $[\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{23}]$.

Una 0-cocatena τ è $\tau_i : U_i \to \mathbb{C}^*$ C^∞,

$(\delta\tau)_{ij} = \frac{\tau_j}{\tau_i}$. Poniamo $\tau_1 = \begin{cases} 1/\sigma_{13} & \text{su } U_1\cap U_3 \\ 1 & \text{su } U_1\cap U_2 \end{cases}$,

$\tau_2 = \begin{cases} \sigma_{12} & \text{su } U_2\cap U_1 \\ 1 & \text{su } U_2\cap U_3 \end{cases}$, $\tau_3 = \begin{cases} \sigma_{23} & \text{su } U_3\cap U_2 \\ 1 & \text{su } U_3\cap U_1 \end{cases}$ e si estende

perché $\mathbb{C}^*$ connesso $\Rightarrow \delta\tau = \sigma$.

$H^1(S^1,(C^\infty_{S^1,\mathbb{R}})^*) = \{\underset{S^1\times\mathbb{R}}{[1,1,1]}, \underset{\text{Möbius}}{[1,1,-1]}\}$.

E, E' fibrati vett. comp. su M di ranghi k e k' e f.d.t. $g_{\alpha\beta}, g'_{\alpha\beta}$.

- E^*: $(g^T_{\alpha\beta})^{-1}$, rango k;
- $E\oplus E'$: $\left(\begin{array}{c|c} g_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & g'_{\alpha\beta}\end{array}\right)$, rango $k+k'$;
- $E\otimes E'$: $g_{\alpha\beta}\otimes g'_{\alpha\beta}$, rango $k\cdot k'$;
- $\Lambda^r E$: $\Lambda^r g_{\alpha\beta}$ ($\Lambda^r g(v_1\wedge\ldots\wedge v_r) = g(v_1)\wedge\ldots\wedge g(v_r)$), rango $\binom{k}{r}$;
- $\det E$: $\Lambda^k E$, $\det g_{\alpha\beta}$, fibrato in rette.

Se $k=k'=1$, $E\otimes E'$ ha rango 1 con f.d.t. $g_{\alpha\beta}\cdot g'_{\alpha\beta}$ e

E^* " " " " $\frac{1}{g_{\alpha\beta}}$.

Se $E\cong E_1$, $E'\cong E'_1 \Rightarrow E\otimes E' \cong E_1\otimes E'_1$, $E^*\cong E_1^*$.

$E\otimes E^*$ è banale. $E\otimes E'\cong E'\otimes E$.

Questo ci dà la struttura di gruppo abeliano per le classi di isomorfismo di fibrati in rette su M:

$[E]+[E'] = [E\otimes E']$, $-[E] = [E^*]$, $0 = [M\times\mathbb{C}]$.

Lo chiamiamo $\mathrm{Pic}_{C^\infty}(M)$.

Oss.: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) \overset{\text{f.d.t.}}{\rightsquigarrow} g_{ij} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^k$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k) = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k))^*$,

se $k>0$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) = \underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)}_{k}$.

Def.: (E,π) fibrato vett. comp. (rango k) su M, $U\subset M$ aperto, una SEZIONE di E su U è una $\sigma: U\to E$ C^∞ t.c.

$\pi\circ\sigma = id_{|U}$ $\begin{array}{ccc} & & E \\ & \overset{\sigma}{\nearrow} & \downarrow\pi \\ U & \hookrightarrow & M\end{array}$. Le indichiamo con $\Gamma(U,E)$, gruppo abeliano e $\Gamma(U,C^\infty_M)$-modulo.

Un FRAME per E su U sono $\sigma_1,\ldots,\sigma_k\in\Gamma(U,E)$ t.c. $\forall x\in U$ $\sigma_1(x),\ldots,\sigma_k(x)$ è base di $E_x = \pi^{-1}(x)$.

Dare un frame di E su U è come dare una banalizzazione di E su U:

$\varphi_U: \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{C}^k$ diffeo., $e_1,\ldots,e_k$ base canonica di $\mathbb{C}^k$,

$\sigma_i = \varphi_U^{-1}(\cdot, e_i)\in\Gamma(U,E)$ è frame;

$\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ frame su U, $y\in\pi^{-1}(U)$, $x\in\pi(y)$, $y\in E_x$,

$y = \lambda_1(y)\sigma_1(y)+\ldots+\lambda_k(y)\sigma_k(y)$, $\lambda_i:\pi^{-1}(U)\to\mathbb{C}$ C^∞,

$\varphi_U: \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{C}^k$, $y\longmapsto \left(\pi(y), \begin{pmatrix}\lambda_1(y)\\ \vdots \\ \lambda_k(y)\end{pmatrix}\right)$ è banalizzazione di E su U.

Oss.: $U,V\subseteq M$ aperti, σ_U frame su U, σ_V frame su $V \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \varphi_U, \varphi_V \rightsquigarrow g_{UV}$; la matrice del cambio di frame da σ_V a σ_U è $M^{\sigma_U}_{\sigma_V}(id) = g_{UV}$.

E banale $\Leftrightarrow \exists$ frame globale per E.

$\begin{array}{ccc}\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U\times\mathbb{C}^k \\ \sigma\uparrow\downarrow\pi & & \\ U & & \end{array}$, $\varphi_U\circ\sigma: x\longmapsto \left(x, \underbrace{\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_k(x)\end{pmatrix}}_{F_U(x)}\right)$,

$F_U: U\to\mathbb{C}^k$ C^∞,

$\sigma(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x)\varphi_U^{-1}(x,e_i)$.

Se $U,V\subseteq M$ aperti banalizzanti, $U\cap V\neq\emptyset$,

su U $\sigma\rightsquigarrow F_U$, su V $\sigma\rightsquigarrow F_V$, su $U\cap V$ $F_U = g_{UV}F_V$,

cioè ho dati locali per σ compatibili con le f.d.t..

$U\subseteq M$ aperto, $\Gamma(U,E)\longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{ricoprimento aperto } \{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \text{ di } U \text{ banalizzante } E, \\ \forall\alpha\in I,\ F_\alpha: U_\alpha\to\mathbb{C}^k\ C^\infty \text{ t.c. su } U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset \\ F_\alpha = g_{\alpha\beta}F_\beta\end{array}\right\}_{/\sim}$

$\{(U_\alpha,F_\alpha)\}\sim\{(U'_\beta,F'_\beta)\}$ se su $U_\alpha\cap U'_\beta\neq\emptyset$ $F_\alpha = g_{U_\alpha U'_\beta}F'_\beta$.

Il prefascio su M $U\longmapsto\Gamma(U,E)$, sia esso Γ_E, è canonico;

$C^\infty(E) = \mathrm{Sheaf}(\Gamma_E)$ fascio di germi delle sezioni di E

$(\Gamma(U,C^\infty(E)) = \Gamma(U,E))$.

$C^\infty(M\times\mathbb{C}^k) = \underbrace{C^\infty_M\oplus\ldots\oplus C^\infty_M}_{k}$.

E loc. banale $\longleftrightarrow C^\infty(E)$ è un fascio di C^∞_M-moduli loc. isomorfo a $\underbrace{C^\infty_M\oplus\ldots\oplus C^\infty_M}_{k}$, cioè è loc. libero di rango k.

$\{\text{fibrati complessi su } M\}\longleftrightarrow\{\text{fasci di } C^\infty_M\text{-moduli su } M \text{ loc. liberi}\}$.

$E \longmapsto C^\infty(E)$

($\leftarrow$) $\mathcal{E}$ fascio di C^∞_M-moduli loc. libero di rango k,

$\exists\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ricoprimento aperto di M t.c. $\psi_\alpha: \mathcal{E}_{|U_\alpha}\xrightarrow{\text{iso.}}\underbrace{C^\infty_M\oplus\ldots\oplus C^\infty_M}_{k}$.

Su $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, $\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}$ è data da una matrice $k\times k$ di funzioni C^∞ invertibile pto per pto; soddisfano le ⊛ delle f.d.t. $\rightsquigarrow E$ fibrato di rango k su M, $C^\infty(E) = \mathcal{E}$.

Si pone $H^i(M,E) = H^i(M,C^\infty(E))$.

Def.: (E,π) fibrato complesso su M si dice OLOMORFO se E è una var. comp. e in ogni pto ammette banalizzazione olo. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ammette f.d.t. olo.. $\Rightarrow \pi$ è olo..

Un morfismo di fibrati olo. lo chiediamo olo. e sezioni di fibrati olo. le chiediamo olo..

$\sigma\in\Gamma(U,\underset{\text{olo.}}{E})$ è loc. data da $F_\alpha: U_\alpha\to\mathbb{C}^k$ olo. t.c. su $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ $F_\alpha = g_{\alpha\beta}F_\beta$.

- Il fascio dei germi delle sezioni (olo.) di E è $\mathcal{O}(E)$;
- i fibrati in rette olo. si dicono LINE BUNDLES;
- le operazioni tra fibrati sono interne alla classe olo.:

$\mathrm{Pic}(M) = \{\text{classi di iso. di line bundles}\}\cong H^1(M,\mathcal{O}^*_M)$.

Es.: $z_1,\ldots,z_n$ coordinate olo. su $U\subseteq M$ aperto,

- $T'(M)$ tangente olo., $\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n}$ frame su U;
- $(T^1(M))^* = \Omega^1_M$ cotangente olo., $dz_1,\ldots,dz_n$ frame;
- $\det(\Omega^1_M) = K_M$ fibrato canonico di M (line bundle), $dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$ frame;
- Ω^p_M p-forme olo., $dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p}$, $1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n$ frame;
- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ è un line bundle su $\mathbb{P}^n$, ammette sezioni globali $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k>0$.

Su $\mathbb{P}^1_{x_0,x_1} = U_0\cup U_1$; una sezione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ è data da

$F_1: \underset{\mathbb{C}_y}{U_1}\to\mathbb{C}$, $F_0: \underset{\mathbb{C}_x}{U_0}\to\mathbb{C}$ olo., $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_0}{x_1}$, su

$U_0\cap U_1 = \mathbb{C}^*$ $F_1(y) = \left(\frac{1}{x}\right)^k F_0(x)$.

Se $k>0$, $F_0(x) = x^k$, $F_1(y) = 1 \rightsquigarrow$ sezione globale.

$k=0$ ---> $F_1(\frac{1}{x}) = F_0(x)$ su $\mathbb{C}^*\Rightarrow F_1 = F_0 = $ cost..

$k<0$: ---> $F_1(\frac{1}{x}) = x^{-k}F_0(x)$, $\nexists$ sezioni globali.

$T^1(\mathbb{P}^1)$ è un line bundle $\Rightarrow$ è un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$. Ex.: trova k.

$K_{\mathbb{P}^1} = \det(\Omega^1_{\mathbb{P}^1}) = \Omega^1_{\mathbb{P}^1} = T^1(\mathbb{P}^1)^* = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$.