$[\ ]: \mathrm{Div}(M) \to \mathrm{Pic}(M)$ omomorfismo di g.a..
$D \longmapsto [D]$

$\downarrow$
"il" line bundle associato a D

$D = \sum a_i V_i$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di M t.c. $\forall\, i$, su U_α, V_i ha f.d.l. $h_{i\alpha} \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_M)$; $h_\alpha = \prod h_{i\alpha}^{a_i}$ è f.d.l. per D su U_α, $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}_M^*)$.
Su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\frac{h_\alpha}{h_\beta}$ è olo. e mai nulla e dà un 1-cociclo di $\mathcal{O}_M^*$.
Otteniamo un line bundle con f.d.t. $g_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta}$ relative a $\mathcal{U}$.
Se h'_α sono altre f.d.l. per D su U_α, allora $h'_\alpha = f_\alpha h_\alpha$ con $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_M^*) \Rightarrow g'_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} g_{\alpha\beta} \Rightarrow$ i fibrati sono isomorfi $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow [D] \in \mathrm{Pic}(M)$.

$\mathrm{Ker}[\ ] = \mathrm{Im}(\ ) =$ DIVISORI PRINCIPALI.

Es.: su $\mathbb{P}^n_{z_0,\dots,z_n}$, H iperpiano di equazione $\sum \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\!\!\!\;\mathbb{C} \text{ non tutti nulli}}}{a_i} z_i = 0$, D il divisore dato da H, su $U_i = \{z_i \neq 0\}$ D ha f.d.l. $h_i = \sum a_j \frac{z_j}{z_i}$. $[D]$ ha f.d.t. $g_{ij} = \frac{z_j}{z_i} \Rightarrow [D] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)]$, indipendentemente da H.

$p \in \mathbb{C}[z_0,\dots,z_n]$ omogeneo di grado d, $D_p = (p) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^n)$;
$p = \prod p_i^{a_i}$ (p_i omogenei, irr., distinti), $(p) = \sum a_i \{p_i = 0\}$. Su U_i ha f.d.l.
$h_i = p\left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right) = \frac{p}{z_i^d}$; su $U_i \cap U_j$, $g_{ij} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^d \Rightarrow$
$\Rightarrow [D] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)]$ indipendentemente da p.
$p, q \in \mathbb{C}[z_0,\dots,z_n]$ omogenei di grado $d \geq 1 \Rightarrow \frac{p}{q} \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{M}_M^*)$,
$0 = \left[\left(\frac{p}{q}\right)\right] = [(p) - (q)] = [(p)] - [(q)]$.

$\mathrm{Im}(\ ) \subseteq \mathrm{Ker}[\ ]$: $f \in H^0(M, \mathcal{M}_M^*)$, $D = (f) = \sum \mathrm{ord}_V(f) V$. D ha su U_α f.d.l. $h_\alpha = f_{|U_\alpha} \Rightarrow$ su $U_\alpha \cap U_\beta$ $g_{\alpha\beta} = 1 \Rightarrow [D] = [0]$ è banale.
$\mathrm{Ker}[\ ] \subseteq \mathrm{Im}(\ )$: D con f.d.l. h_α su U_α t.c. $[D] = 0 \Rightarrow$ il fibrato con f.d.t. $g_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta}$ è banale $\Rightarrow \exists\, f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_M^*)$ t.c. $\frac{h_\alpha}{h_\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$ su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$; $f_\alpha h_\alpha$ sono dati locali che si reincollano a dare $F \in H^0(M, \mathcal{M}_M^*)$ t.c. $(F) = D$.

Si confonde:

$\underset{\text{fibrato olo.}}{E} \longleftrightarrow \underset{\text{fascio dei germi delle sezioni olo. di } E}{\mathcal{O}(E)}$ (hanno le stesse sezioni), $H^i(M, E) = H^i(M, \mathcal{O}(E))$;

$M \times \mathbb{C} \longleftrightarrow \mathcal{O}_M$;
$E \longleftrightarrow [E]$.

Def.: E line bundle su M, $U \subseteq M$ aperto, una sezione MEROMORFA di E su M è il dato di
$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di U banalizzante E (con f.d.t. $g_{\alpha\beta}$);
$\forall \alpha \in I$ $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}_M)$ t.c. su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$.
Il fascio dei germi delle sezioni meromorfe di E è $\mathcal{M}(E)$ ($= \mathcal{O}(E) \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{M}_M$).
- $s, s' \in H^0(U, \mathcal{M}(E))$, $s' \neq 0 \Rightarrow s/s'$ meromorfa su U:
$s \rightsquigarrow f_\alpha$, $s' \rightsquigarrow f'_\alpha$, $\frac{f_\alpha}{f'_\alpha}$, su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $\frac{f_\alpha}{f'_\alpha} = \frac{f_\beta}{f'_\beta}$, si reincollano;
- $f \in H^0(U, \mathcal{M}_M)$, $s \in H^0(U, \mathcal{M}(E)) \Rightarrow fs \in H^0(U, \mathcal{M}(E))$:
loc. $f \rightsquigarrow \frac{F_\alpha}{G_\alpha}$, $s \rightsquigarrow s_\alpha$, su $U_\alpha \cap U_\beta$ $\frac{F_\alpha}{G_\alpha} s_\alpha = g_{\alpha\beta} \frac{F_\beta}{G_\beta} s_\beta$.

Def.: E line bundle su M, $s \in H^0(M, \mathcal{M}(E))$, $s \neq 0$. Loc. su U_α $s \rightsquigarrow s_\alpha$,
$\frac{s_\alpha}{s_\beta} = g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_M^*) \Rightarrow$ è ben def. $\mathrm{ord}_V(s) = \mathrm{ord}_{V \cap U_\alpha} s_\alpha = \mathrm{ord}_{V \cap U_\beta} s_\beta$, V ipersuperficie irr., $V \cap U_\alpha \neq \emptyset \neq V \cap U_\beta$.
Poniamo $(s) = \sum_V \mathrm{ord}_V(s) V \in \mathrm{Div}(M)$.

Oss.: $(s) \geq 0 \Leftrightarrow s \in H^0(M, \mathcal{O}(E))$.

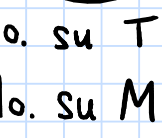
$D \in \mathrm{Div}(M)$ con f.d.l. $f_\alpha \in H^0(U_\alpha, \mathcal{M}_M^*)$ sul ricoprimento aperto di M $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.
Le f_α danno una sezione globale meromorfa di $[D]$, $s \in H^0(M, \mathcal{M}(E))$ e $(s) = D$.
$L \in \mathrm{Im}[\ ]$, se $D \in \mathrm{Div}(M)$ t.c. $[D] = L$, allora $\exists\, s \in H^0(M, \mathcal{M}(L))$, $s \not\equiv 0$ t.c. $(s) = D$.
Viceversa: $L \in \mathrm{Pic}(M)$, $s \in H^0(M, \mathcal{M}(L))$, $s \not\equiv 0$, loc. $s \rightsquigarrow s_\alpha$ su U_α, $\frac{s_\alpha}{s_\beta} = g_{\alpha\beta}$ su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \Rightarrow [(s)] = L$.
$\mathrm{Im}[\ ] = \{L \in \mathrm{Pic}(M) \mid H^0(M, \mathcal{M}(L)) \neq \{0\}\}$; inoltre, $L = [D]$ con $D \geq 0$ ($D \neq 0$) $\Leftrightarrow H^0(M, \mathcal{O}(L)) \neq \{0\}$.

Def.: $D \in \mathrm{Div}(M)$, $D = \sum a_i V_i$, poniamo
$\mathcal{L}(D) = \{f \in H^0(M, \mathcal{M}_M^*) \mid (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$.
$f \in \mathcal{L}(D)$, è olo. fuori da $\bigcup V_i$; se $a_i > 0$, f può avere un polo lungo V_i di ordine $\leq a_i$; se $a_i < 0$, f deve avere uno zero lungo V_i di ordine $\geq -a_i$.
Oss.: $\mathcal{L}(D)$ è $\mathbb{C}$-s.v..
Se $s_0 \in H^0(M, \mathcal{M}([D]))$, $(s_0) = D$, $\forall s \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$, $f_s = \frac{s}{s_0} \in H^0(M, \mathcal{M}_M)$,
$(f_s) + D = (s) - (s_0) + D = (s) \underset{\substack{\downarrow \\ s \text{ olo.}}}{\geq} 0 \Rightarrow f_s \in \mathcal{L}(D)$.

Viceversa, $f \in \mathcal{L}(D)$, $s = f \cdot s_0 \in H^0(M, \mathcal{M}([D]))$, ma è olo., infatti
$(s) = (f) + (s_0) = (f) + D \geq 0$.
Allora abbiamo $\mathcal{L}(D) \to H^0(M, \mathcal{O}([D]))$ iso. $\mathbb{C}$-lineare.

Se M cpt, $0 \neq D \in \mathrm{Div}(M)$, $D \geq 0 \Rightarrow H^0(M, \mathcal{O}([-D])) = \{0\}$;
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\wr\wr}{\mathcal{L}(-D)} \ni f$
f dev'essere olo., M cpt $\Rightarrow f$ cost., ma si annulla su $D \Rightarrow f = 0$.
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)$, $d > 0$ non hanno sezioni globali olo..

Es.: M cpt, $\dim M = 1$, $D \in \mathrm{Div}(M)$, $D = \sum_{i=1}^{k} a_i p_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \in M$,
poniamo $\deg(D) = \sum_{i=1}^{k} a_i$. $\deg: \mathrm{Div}(M) \to \mathbb{Z}$ è omomorfismo di gruppi. $\deg D < 0 \Rightarrow H^0(M, \mathcal{O}([D])) = \{0\}$.
$f \in H^0(M, \mathcal{M}_M) \longleftrightarrow f: M \to \mathbb{P}^1$ olo. e se $f \neq 0$, per il teo. dei residui, f ha tanti zeri quanti poli (contati con molteplicità) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \deg(f) = 0$.
$D = \sum a_i p_i - \sum b_j q_j$, $a_i, b_j > 0$, $\sum b_j > \sum a_i$;
$0 \neq f \in \mathcal{L}(D)$ deve avere zeri nei q_j (ordine $\geq b_j$),
può avere poli nei p_i (ordine $\leq a_i$);
$\#$ zeri di $f \geq \sum b_j > \sum a_i \geq \#$ poli di f, assurdo.

$M = T$ toro , $p \in T$, $f \in \mathcal{L}(p) \cong H^0(M, \mathcal{O}([p])) = \mathbb{C}$,
f è
- olo. su T ($\Rightarrow$ cost.)
- olo. su $M \setminus \{p\}$ e in p ha un polo di ordine $1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists!$ zero di $f \Rightarrow f: M \to \mathbb{P}^1$ biunivoca, ma T non è omeo. a S^2, assurdo.

$M = \mathbb{P}^n$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, $H^0(M, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = ?$ $H \subseteq \mathbb{P}^n$ iperpiano, $L \in [dH]$.
- $d = 0$: $L \cong \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0)) = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathbb{C}$;
- $d < 0$: $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \{0\}$;
- $d > 0$: prossima lezione.