$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{z_0,\dots,z_n}$

$J = \{ (p, v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \pi^{-1}(p) \cup \{0\} \}$ FIBRATO TAUTOLOGICO, la fibra su $p = \pi(v)$ è $\mathrm{Span}\{v\} \Rightarrow$ line bundle su $\mathbb{P}^n$.

$J = \{ (\pi(v), v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \} \cup \mathbb{P}^n \times \{0\}$.

Un frame di J su $U_i = \{z_i \neq 0\}$ è $[z_0, \dots, z_n] \longmapsto \left([z_0,\dots,z_n], \begin{pmatrix} z_0/z_i \\ \vdots \\ z_n/z_i \end{pmatrix}\right)$; su U_0 dà una sezione olo. di J, e dà una sezione mero. globale di J con un polo semplice su $\{z_0 = 0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow (s) = -\{z_0 = 0\} \Rightarrow J = [-H] = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = J^* \Rightarrow$
$\Rightarrow$ la fibra su $p = \pi(v)$ di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ è $\mathrm{Span}\{v\}^* = \mathrm{Hom}(\mathrm{Span}\{v\}, \mathbb{C})$.

Ogni $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$ dà per restrizione una sezione olo. σ_f di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, $\sigma_f(p) = f_{|\mathrm{Span}\{v\}}$, $p = \pi(v)$. $\sigma_f = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

Otteniamo $(\mathbb{C}^{n+1})^* \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ lineare ini..

La fibra di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) = [dH] = \underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)}$ su $p = \pi(v)$ è $\underbrace{\mathrm{Span}\{v\}^* \otimes \dots \otimes \mathrm{Span}\{v\}^*}_{d}$ pensato come d pol. omogenei di grado d in una variabile.

Per restrizione $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{pol. omogenei in } z_0,\dots,z_n \text{ di grado } d}}{\mathrm{Sym}^d(\mathbb{C}^{n+1})} \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, $F \mapsto \sigma_F$; è isomorfismo.

Data $\sigma \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, fissiamo $F \in \mathrm{Sym}^d(\mathbb{C}^{n+1})$, $g = \frac{\sigma}{\sigma_F}$ mero. globale su $\mathbb{P}^n$, $G' = g \circ \pi$ mero. su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ con polo "semplice lungo $\{F = 0\}$" e olo. altrove. $G = G'F$ è olo. su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \underset{\text{Hartogs}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow$ si estende a olo. intera su $\mathbb{C}^{n+1}$.

$G'(\lambda x) = G'(x)\ \forall x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow$
$\Rightarrow G(\lambda x) = \lambda^d G(x)\ \forall x \in \mathbb{C}^{n+1}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Restringendo G alla retta $l = \mathrm{Span}\{v\}$ $(v \neq 0)$,

$G_{|l} = \begin{cases} 0 \\ \text{olo. con polo a } \infty \text{ di ordine } d \text{ e uno zero in } 0 \text{ di ordine } d \end{cases} \Rightarrow G_{|l} = \mu t^d, \mu \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la serie di potenze di G centrata in 0 (convergente su tutto $\mathbb{C}^{n+1}$) contiene solo termini di grado $d \Rightarrow G$ è un pol. omogeneo di grado d e $\sigma_G = \sigma$. $\dim H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{d}$ $(d > 0)$.

$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} = \{[dH] \mid d \in \mathbb{Z}\}$.

Teo. (Chow): $V \subseteq \mathbb{P}^n$ ipersuperficie analitica $\Rightarrow$ è algebrica (cioè è globalmente luogo di zeri di un pol. omogeneo).

Dim.: $V \rightsquigarrow$ divisore effettivo ($V = \sum V_i$, $V_i \subseteq V$ componenti irr.).
$\exists d > 0$ t.c. $[V] = [dH] \Rightarrow \exists \sigma \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ t.c. $(\sigma) = V \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists F$ pol. omogeneo di grado d t.c. $\sigma = \sigma_F \Rightarrow V = (\sigma_F) \Rightarrow V = \{F = 0\}$. $\square$

Il teo. vale anche se $\dim V = k < n-1$.

$g \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{M}_M) \Rightarrow g$ è razionale, cioè $g = \frac{F}{G}$, F, G pol. omogenei dello stesso grado. $(g) = (g)_0 - (g)_\infty$, $(g)_0, (g)_\infty \geq 0$ e quindi algebrici $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ F, G$ pol. omogenei t.c. $(F) = (g)_0$, $(G) = (g)_\infty$.

$\deg F = \#\{\{F = 0\} \cap \text{retta generica}\}$.
$\#\{\{F = 0\} \cap \text{retta}\} = \#$ zeri di g sulla retta (con molteplicità),
$\#\{\{G = 0\} \cap \text{retta}\} = \#$ poli di g sulla retta (con molteplicità) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \deg F = \deg G \Rightarrow \frac{F}{G} \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{M}_{\mathbb{P}^n})$, $\left(\frac{F}{G}\right) = (g) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{g}{F/G}$ è olo. mai nulla su $\mathbb{P}^n \Rightarrow g = \lambda \frac{F}{G}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Def.: M var. comp., la succ. esatta di fasci di g.a. su M

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_M^* \to 1 \quad \text{induce}$$

$$\mathrm{Pic}(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}) \quad \text{prima classe di Chern.}$$

Se L è line bundle su M, $c_1(L) = c_1([L])$, $c_1(L^*) = -c_1(L)$, $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$.

$M = \mathbb{P}^n$, $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{c_1} \mathbb{Z}$ ($\cong H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ generato dal duale di Poincaré di un iperpiano).

Poiché $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$, c_1 è ini. e $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = d \Rightarrow$
$\Rightarrow c_1$ è isomorfismo.

Def.: $D, D' \in \mathrm{Div}(M)$ si dicono LINEARMENTE EQUIVALENTI

$$D \sim D' \Longleftrightarrow \exists f \in H^0(M, \mathcal{M}_M^*) \text{ t.c. } D' = D + (f) \ (\Longleftrightarrow [D'] = [D]).$$

Def.: $D \in \mathrm{Div}(M)$, la SERIE LINEARE associata a D è

$$|D| = \{D' \in \mathrm{Div}(M) \mid D' \geq 0, D' \sim D\}.$$

$D' \in D \Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(D)$ t.c. $D' = D + (f)$, otteniamo

$$\mathcal{L}(D) \to |D| \quad \text{suri.}, \qquad f \mapsto D + (f)$$

Poiché $(\lambda f) = (f)\ \forall\, 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ otteniamo

$$\mathbb{P}H^0(M, \mathcal{O}([D])) \cong \mathbb{P}\mathcal{L}(D) \to |D| \quad \text{suri.}, \qquad s \mapsto s/s_0 \mapsto (s)$$

Se M è cpt, è anche ini.: $f, f' \in \mathcal{L}(D)$ t.c. $(f) + D = (f') + D \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{f}{f'}$ è olo. globale mai nulla, cioè cost. $\neq 0$.

Se M cpt, $\forall D \in \mathrm{Div}(M)$ $|D| \cong \mathbb{P}\mathcal{L}(D) \cong \mathbb{P}H^0(M, \mathcal{O}([D]))$ e si pone $\dim |D| = \dim \mathcal{L}(D) - 1$. $|D|$ è dato dai divisori delle sezioni olo. (non nulle) di $[D]$.

Def.: un SISTEMA LINEARE DI DIVISORI $\mathcal{S}$ è una famiglia di divisori effettivi su M corrispondente a un sottospazio $E < H^0(M, \mathcal{O}([D]))$, $D \in \mathrm{Div}(M)$. $\mathcal{S} = \{(s) \mid s \in E \setminus \{0\}\}$; $E \setminus \{0\} \to \mathcal{S}$, $s \mapsto (s)$ passa a $\mathbb{P}E \to \mathcal{S}$ suri. e se M è cpt $\mathbb{P}E \cong \mathcal{S}$ è si pone $\dim \mathcal{S} = \dim E - 1$.

$\mathcal{S}$ si dice COMPLETO se $E = H^0(M, \mathcal{O}([D]))$ per qualche $D \in \mathrm{Div}(M)$ $(\mathcal{S} = |D|)$.

Se $\dim \mathcal{S} = 1$ si dice PENCIL (fascio).

Es.:
- pencil delle rette di $\mathbb{P}^2_{z_0, z_1, z_2}$ passanti per $P = [1, 0, 0] \longleftrightarrow$
  $\longleftrightarrow$ sezioni olo. di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ nulle in P, $E = \mathrm{Span}\{z_1, z_2\}$;
- pencil delle coniche di $\mathbb{P}^2$ per 4 pti non allineati $\longleftrightarrow$
  $\longleftrightarrow$ sezioni olo. di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ nulle nei 4 pti.

Def.: $\mathcal{S}$ sistema lineare di divisori su M, il LUOGO BASE di $\mathcal{S}$ è

$$BL(\mathcal{S}) = \bigcap_{D \in \mathcal{S}} \mathrm{supp}(D) \ (\text{se } D = \textstyle\sum a_i V_i,\ a_i \neq 0,\ \mathrm{supp}\, D = \bigcup V_i)$$
$$= \{p \in M \mid \sigma(p) = 0\ \forall p \in E\}, \quad \mathcal{S} = \{(s) \mid s \in E\}.$$

$s_0, \dots, s_k$ base di E, $\mathbb{P}E \cong \mathbb{P}^k$, $[\alpha_0 s_0 + \dots + \alpha_k s_k] \mapsto [\alpha_0, \dots, \alpha_k]$.

$\mathcal{S} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^k}$; se $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{P}^k$ sono indipendenti,

$$BL(\mathcal{S}) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{P}^k} \mathrm{supp}(D_\lambda) = \mathrm{supp}\, D_{\lambda_0} \cap \dots \cap \mathrm{supp}\, D_{\lambda_k}.$$

$(s_0), \dots, (s_k)$ sono generatori di $\mathcal{S}$; gli altri elementi di $\mathcal{S}$ sono $(\alpha_0 s_0 + \dots + \alpha_k s_k)$ (non $\alpha_0 (s_0) + \dots + \alpha_k (s_k)$).

Teo. (Bertini): il generico elemento di un sistema lineare è liscio fuori dal luogo base.

Es.: coniche per 4 pti.