D'ora in poi, M var. comp. cpt.

$L \in \mathrm{Pic}(M)$, $E \subseteq H^0(M, \mathcal{O}(L))$ sottospazio, $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ base di E.
Sull'aperto $U \subseteq M$ banalizzante E le σ_i hanno dati locali $s_{0,U}, \dots, s_{N,U} \in H^0(U, \mathcal{O}_M)$.
Se $x \in U$ t.c. $(\sigma_0(x), \dots, \sigma_N(x)) \neq (0, \dots, 0)$, $[s_{0,U}(x), \dots, s_{N,U}(x)] \in \mathbb{P}^N$ è ben def. poiché su $V \subseteq M$ aperto banalizzante, $x \in V$ $s_{i,U} = g_{U,V} s_{i,V}$.

$$i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N} : M \setminus \{x \in M \mid \sigma_0(x) = \dots = \sigma_N(x) = 0\} \to \mathbb{P}^N \text{ olo..}$$

- Cambiando base di E, la mappa cambia per una proiettività di $\mathbb{P}^N$;
- $\mathrm{Im}\, i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N}$ non è contenuta in un iperpiano di $\mathbb{P}^N$ ($\Longleftarrow$ $\Longleftarrow$ $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ lin. indi.).

$\mathcal{S}$ il sistema lineare dato da E, $\mathcal{S} = \{(s) \mid s \in E \setminus \{0\}\} \cong \mathbb{P}E$.
$p \in BL(\mathcal{S})$, $H_p = \{s \in E \mid s(p) = 0\}$ è un iperpiano in E.

$$i_E : M \setminus BL(E) \longrightarrow \underbrace{(\mathbb{P}E)^* \cong \mathbb{P}E^*}_{\text{iperpiani in } E} \quad \text{olo..}$$
$$p \longmapsto H_p$$

- $i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N}$ realizza i_E;
- se $E = H^0(M, \mathcal{O}(L))$, $i_E = i_L$;
- i_E definita su tutto $M \iff BL(\mathcal{S}) = \emptyset \iff \forall x \in M\ \exists \sigma \in E$ t.c. $\sigma(x) \neq 0$;
- i_E ini. $\iff \forall x, y \in M \setminus BL(\mathcal{S})$ t.c. $x \neq y$ $\exists \sigma \in E$ t.c. $\sigma(x) = 0$, $\sigma(y) \neq 0$.

$\forall f : M \to \mathbb{P}^N$ olo. con immagine $\not\subseteq$ iperpiano $\exists L \in \mathrm{Pic}(M)$, $E \subseteq H^0(M, \mathcal{O}(L))$ sottospazio t.c. f realizza i_E.

$f : M \to N$ olo. tra var. comp.,

$$\begin{tikzcd} f^*(L) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & L \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

$L \rightsquigarrow$ fibrato complesso

il pull-back di L tramite f è $f^*(L) = \{(p, v) \in M \times L \mid f(p) = \pi(v)\}$, è un fibrato complesso di M e il diagramma commuta.
Poiché $L \cong L' \Rightarrow f^*(L) \cong f^*(L')$, otteniamo $f^* : \mathrm{Pic}(N) \to \mathrm{Pic}(M)$.
Componendo con f otteniamo $\Gamma(U, L) \xrightarrow{\circ f} \Gamma(f^{-1}(U), f^*(L))$ $\forall U \subseteq N$ aperto; otteniamo $f^* : H^0(N, L) \to H^0(M, f^*(L))$.
$D \in \mathrm{Div}(N)$ t.c. $\mathrm{Im}\, f \not\subseteq \mathrm{supp}(D_i) = \bigcup V_i$, $D = \sum \alpha_i V_i$, $\alpha_i \neq 0$ con f.d.l. h_α su U_α. $f^*(D)$ è il divisore su M con f.d.l. $h_\alpha \circ f$ su $f^{-1}(U_\alpha)$; otteniamo $f^* : \mathrm{Div}(N) \to \mathrm{Div}(M)$ se $\mathrm{Im}\, f \not\subseteq$ sottovarietà analitica propria di N.

Oss.: $[f^*(D)] = f^*([D])$.

Oss.: $p = [\lambda_0, \dots, \lambda_N] \in \mathbb{P}^N_{z_0, \dots, z_N}$ è determinato dalle immagini delle sezioni di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ date da $z_0, \dots, z_N$.

Data $f : M \to \mathbb{P}^N$ olo. con immagine $\not\subseteq$ iperpiano, $L = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) = [H]$, $H \subseteq \mathbb{P}^N$ iperpiano, $L = [f^*(H)]$ sezione iperpiana di $f(M)$).
$\sigma_i = f^*(z_i) \in H^0(M, \mathcal{O}(L))$. $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ sono lin. indi. perché f^* è ini. su $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$: $s \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ t.c. $f^*(s) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, f \subseteq (s)$ iperpiano.
$E = \mathrm{Span}\{\sigma_0, \dots, \sigma_N\} = f^*(H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))) \subseteq H^0(M, f^*(L))$, $f = i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N}$ (f realizza i_E).

Es.: $M = \mathbb{P}^1$, $k \geq 1$, $p \in M$, $i_{[kp]} : M \to \mathbb{P}^k$, $[x_0, x_1] \mapsto [x_0^k, x_0^{k-1} x_1, \dots, x_0 x_1^{k-1}, x_1^k]$ immersioni.
$k = 2$: $\mathrm{Im}\, i_{[2,p]}$ è la conica liscia di $\mathbb{P}^2$;
$k = 3$: cubica gobba di $\mathbb{P}^3$.
$H \subseteq \mathbb{P}^N$ iperpiano, $k \geq 1$, $i_{[kH]} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ immersione di Veronese. $\to N = \binom{n+k}{k} - 1$

Supponiamo i_E definita su tutto M e ini., è embedding $\iff \forall x \in M$
$(di_E)_x : T_{\mathbb{R},x}(M) \to T_{\mathbb{R}, i_E(x)}(\mathbb{P}^N)$ è ini. $\iff \forall x \in M$
$(di_E)_x : T'_x(M) \to T'_{i_E(x)}(\mathbb{P}^N)$ è ini. $\iff \forall x \in M$
$(di_E)_x^T : T'^*_{i_E(x)}(\mathbb{P}^N) \to T'^*_x(M)$ è suri. $\overset{*}{\iff} \forall v^* \in T'^*_x(M)$
$\exists \sigma \in E$ con dati locali s_α su $x \in U_\alpha \subseteq M$ aperto banalizzante E t.c. $s_\alpha(x) = 0$ e $ds_\alpha(x) = v^*$.

Supponiamo $i_E(x) \in U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ con coordinate $y_1 = \frac{z_1}{z_0}, \dots, y_N = \frac{z_N}{z_0}$, $x_1, \dots, x_n$ coordinate olo. in un intorno di x.
$i_E \longleftrightarrow y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{s_i}{s_0}$ olo., s_i dati locali di una base $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ di E,
$(di_E)_x^T : dy_i \longmapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} dx_j$.

($\overset{*}{\Longrightarrow}$) $v^* = \sum_{j=1}^n A_j dx_j$, possiamo risolvere $(di_E)_x^T(\sum_i \beta_i dy_i) = \sum_{i,j} \beta_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = \sum A_j dx_j \Rightarrow A_j = \sum_i \beta_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \sum \beta_i \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}(x) \frac{1}{s_0(x)} - \frac{s_i(x)}{s_0^2(x)} \frac{\partial s_0(x)}{\partial x_j} \right)$,
$A_j s_0^2(x) = \sum \beta_i \left(s_0(x) \frac{\partial s_i}{\partial x_j}(x) - s_i(x) \frac{\partial s_0(x)}{\partial x_j} \right)$;
$\sigma = \frac{1}{s_0^2(x)} \sum \beta_i (s_0(x) \sigma_i - s_i(x) \sigma_0)$ con dati locali
$s = \frac{1}{s_0^2(x)} \sum \beta_i (s_0(x) s_i - s_i(x) s_0)$, $s(x) = 0$, $(ds)_x = v^*$.

($\overset{*}{\Longleftarrow}$) $\sigma = \sum_{i=0}^N \lambda_i \sigma_i$ ha dati locali $s = \sum_{i=0}^N \lambda_i s_i$, $s(x) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = -\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i s_i(x)}{s_0(x)}$,
$ds(x) = v^* \Rightarrow \sigma = \frac{1}{s_0^2(x)} \sum_{i=1}^N \beta_i (s_0(x) \sigma_i - s_i(x) \sigma_0)$, cioè $\beta_i = \lambda_i s_0(x)$;
come sopra, $(di_E)_x^T(\sum \beta_i dy_i) = v^*$.

Cor.: se $E \subseteq E' \subseteq H^0(M, \mathcal{O}(L))$ sottospazi, i_E embedding $\Rightarrow i_{E'}$ embedding.
Quindi, per testare se M si embedda in un qualche $\mathbb{P}^N$, bastano le i_L, $L \in \mathrm{Pic}(M)$.

$p \in M$, i_E definita in $p \iff E \xrightarrow{\pi_p} L_p$, $\sigma \mapsto \sigma(p)$ suri..
$x, y \in M$, $x \neq y$, i_E definita in x e y, $i_E(x) \neq i_E(y) \iff E \xrightarrow{(\pi_x, \pi_y)} L_x \oplus L_y$, $\sigma \mapsto (\sigma(x), \sigma(y))$ suri..

$x \in M$, $I_x(E) = \{\sigma \in E \mid \sigma(x) = 0\}$. $\sigma \in I_x(E)$ con dati locali s_α su U_α;
$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta \Rightarrow ds_\alpha = ds_\beta\, g_{\alpha\beta} + s_\beta\, dg_{\alpha\beta}$, valutando in x
$ds_\alpha(x) = ds_\beta(x)\, g_{\alpha\beta}(x)$.
La valutazione in x di ds_α dà $d_x : I_x(E) \to T'^*_x \otimes L_x$ e i_E embedding $\iff d_x$ suri. $\forall x \in M$.
$E = H^0(M, \mathcal{O}(L))$, $i_E = i_L$.
$\mathcal{I}_x(L)$ = fascio dei germi delle sezioni di L nulle in x,
$I_x(L) = H^0(M, \mathcal{I}_x(L))$.
$T'^*_x \otimes L_x = H^0(M$, fascio grattacielo a supporto in x e spiga $T'^*_x \otimes L_x)$
con abuso di notazione
L_p, $L_x \oplus L_y$, analoghi.

$$0 \to \underbrace{\mathcal{I}_{x,y}(L)}_{\substack{\text{fascio dei germi delle} \\ \text{sezioni di } L \text{ nulle in } x \text{ e in } y}} \to \mathcal{O}(L) \xrightarrow{(\pi_x, \pi_y)} L_x \oplus L_y \to 0,$$

$$0 \to \underbrace{\mathcal{I}_x^2(L)}_{\substack{\text{" " " "} \\ \text{" " " nulle in } x \\ \text{con diff. nullo in } x}} \to \mathcal{I}_x(L) \xrightarrow{d_x} T'^*_x \otimes L_x \to 0 \text{ esatte.}$$