$\dots \to H^0(M,\mathcal{O}(L)) \to L_x \oplus L_y \to H^1(M, \mathcal{J}_{x,y}(L)) \to \dots,$

$\dots \to H^0(M, \mathcal{J}_x(L)) \to T_x^{1*}(M)\otimes L_x \to H^1(M, \mathcal{J}_x^2(L)) \to \dots .$

$H^1(M, \mathcal{J}_{x,y}(L)) = H^1(M, \mathcal{J}^2_x(L)) = 0 \ \forall x,y \in M,\ x\neq y \Rightarrow$
$\Rightarrow i_L$ immerge M in $\mathbb{P}^N$.

Caso $\dim M = 1$: $\mathcal{J}_{x,y}(L) \cong \mathcal{O}(L-[x]-[y])$,
$\mathcal{J}^2_x(L) \cong \mathcal{O}(L-2[x])$.

Quindi basta $H^1(M, \mathcal{O}(L-[x]-[y])) = 0 \ \forall x,y\in M$.

Vedremo che $D\in \mathrm{Div}(M)$, $\deg D > 2g-2$, g = genere topologico di $M \Rightarrow$
$\Rightarrow H^1(M, \mathcal{O}([D])) = 0 \Rightarrow$ i divisori di grado $>2g$ danno immersioni proiettive.

Es.: M = toro $(g=1)$, $p\in M$, $i_{[3p]}$ immerge M in $\mathbb{P}^N$,
$N = \dim(H^0(M, \mathcal{O}([3p]))) - 1 \underset{\text{in questo caso}}{\geq} 2$.

$f\in \mathcal{L}(3p)$ è olo. su $M\setminus\{p\}$ e in p ha (forse) un polo di ordine ≤ 3: $f \overset{\text{loc.}}{=} \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + f_1$;

se $g\in\mathcal{L}(3p)$ e ha gli stessi a_i di f, allora $f-g$ è olo. su M nulla in $p \Rightarrow f = g \Rightarrow f$ è completamente determinata dagli $a_i \Rightarrow \dim(\mathcal{L}(3p)) \leq 4$, ma <4 poiché $\nexists\, f\in\mathcal{L}(3p)$ con polo semplice.

Allora $N=2$, $i_{[3p]}: M \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ e l'immagine è un'ipersuperficie $\underset{\Downarrow\ \text{algebrica}}{\text{analitica}}$ liscia $\Rightarrow$ irr..

$\deg(i_{[3p]}(M)) = \#\{i_{[3p]}(M)\cap \text{retta}\} = \deg([3p]) = 3$.

$i_{[3p]}(M)$ è una cubica liscia di $\mathbb{P}^2$.

Es.: $g=0$, $p\in M$, $[p]$ immerge M in $\mathbb{P}^1 \Rightarrow M\cong\mathbb{P}^1$.

$D\in\mathrm{Div}(M)$, $0\neq D\geq 0$, $D = \sum a_i V_i$, $a_i\geq 0$; fissiamo $\sigma_0 \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$, $(\sigma_0) = D$. E line bundle su M,

$\mathcal{E}(D)$ = fascio dei germi delle sezioni mero. di E con poli (possibilmente) solo lungo le V_i di ordine $\leq a_i$,

$\mathcal{E}(-D)$ = " " " " " olo. " " nulle lungo V_i di ordine $\geq a_i$.

$\mathcal{M}(E) \xrightarrow{\otimes\sigma_0} \mathcal{M}(E\otimes[D])$ (se σ_0 ha dati locali s_0 e σ ha dati locali s, $\sigma\otimes\sigma_0$ ha dati locali $s_0 s$) che dà un isomorfismo di fasci
$\sigma \longmapsto \sigma\otimes\sigma_0$

$\mathcal{E}(D) \xrightarrow{\otimes\sigma_0} \mathcal{O}(E\otimes[D])$ e $\mathcal{E}(-D) \xrightarrow{\otimes\sigma_0^{-1}} \mathcal{O}(E\otimes[-D])$.

Es.: $V\subseteq M$ ipersuperficie analitica liscia irr., sottovarietà algebrica di M di dim. $n-1$.

$0 \longrightarrow \mathcal{O}(E\otimes[-V]) \longrightarrow \mathcal{O}_M(E) \xrightarrow{\pi_{|V}} \mathcal{O}_V(E_{|V}) \to 0$ esatta.
↳ esteso a 0 su M

$0 \to H^0(M, \mathcal{O}(E\otimes[-V])) \to H^0(M, \mathcal{O}(E)) \to H^0(V, \mathcal{O}(E_{|V})) \to$
$\to H^1(\quad " \quad) \to H^1(\ " \ ) \to H^1(\quad " \quad) \to \dots$.

Se $\dim M = 1$, $V = p$, $0\to\mathcal{O}(E-[p]) \to \mathcal{O}(E) \to E_p \to 0$ esatta $\Longrightarrow$
↳ grattacielo: $H^0(M, E_p) = E_p \cong \mathbb{C}$, $H^i(M,E_p) = 0 \quad \forall i\geq 1$

$0\to H^0(M, \mathcal{O}(E-[p])) \to H^0(M,\mathcal{O}(E)) \to \mathbb{C} \to$
$\to H^1(M, \mathcal{O}(E-[p])) \to H^1(M, \mathcal{O}(E)) \to 0$ esatta.

$\chi(E) := \dim H^0(M, \mathcal{O}(E)) - \dim H^1(M, \mathcal{O}(E)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \chi(E-[p]) = \chi(E) - 1$.

Teo. (Riemann-Roch): $\dim M = 1$ cpt, $L\in\mathrm{Pic}(M)$, (se $L=[D]$, $\deg L = \deg D = \int_M c_1(L)$ = grado di $\mathrm{Im}\, i_L$)
$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_M) + \deg(L)$.

Dim.: induzione su $\deg L$.
Vera per $L=0$; vera per $L \Rightarrow$ vera per $L+[p]$ e $L-[p]$.
Inoltre, $\mathrm{Pic}(M) = \mathrm{Im}[\ ]$: $p\in M$, se $k>>0$ $L+[kp]$ e $[kp]$ danno immersioni proiettive di M ($k>2g$, $k>d-\deg L$).
$\exists\ 0\neq s\in H^0(M, \mathcal{O}([kp]))$, $0\neq s'\in H^0(M, \mathcal{O}(L+[kp])) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0\neq \frac{s'}{s} \in H^0(M, \mathcal{M}(L)) \Rightarrow L = [(s')-(s)]$. $\square$

$\dim H^0(M, \mathcal{O}_M) = 1$, $\dim H^1(M, \mathcal{O}_M) = g \Rightarrow \chi(\mathcal{O}_M) = 1-g$.

$J = \{(v,p)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{P}^{n-1} \mid v = 0 \circ [v] = p\}$ $(=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1))$.
$= \left\{\left(\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix}, [l_1,\dots,l_n]\right) \middle| \underbrace{z_i l_j = z_j l_i}_{rk\begin{pmatrix} z_1 & l_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_n & l_n\end{pmatrix} = 1} \ \forall i,j = 1,\dots,n \right\}$

$\pi: J \to \mathbb{C}^n$ olo..

$\mathbb{C}^n\times\mathbb{P}^{n-1} \supseteq \underset{\mathbb{C}^n\times U_i}{\overset{\parallel}{V_i}} = \{l_i\neq 0\}$ con coordinate olo. $z_1,\dots,z_n, \frac{l_1}{l_i},\dots,\frac{l_{i-1}}{l_i},\frac{l_{i+1}}{l_i},\dots,\frac{l_n}{l_i}$

che danno $\begin{cases} z(i)_j = \frac{l_j}{l_i} & \text{se } i\neq j \\ z(i)_i = z_i \end{cases}$ coordinate olo. su $J\cap V_i$ ($\Rightarrow \dim J = n$).

$\pi_{|J\cap V_i}$ è dato da $(z(i)_1,\dots,z(i)_n) \longmapsto (z(i)_1 z(i)_i, \dots, z(i)_i, \dots, z(i)_n z(i)_i)$.

Su una ipersuperficie V analitica in $\mathbb{C}^n$ con equazione $f(z_1,\dots,z_n) = 0$
$\pi^{-1}(V)$ è ipersuperficie di J con equazione su $J\cap V_i$
$f(z(i)_1 z(i)_i, \dots, z(i)_i, \dots, z(i)_n z(i)_i) = 0$.

$v\in\mathbb{C}^n$, $\pi^{-1}(v) \begin{cases} (v,[v]) & \text{se } v\neq 0 \\ \{0\}\times\mathbb{P}^{n-1} & \text{se } v = 0\end{cases}$; π è biolo. tra $J\setminus(\{0\}\times\mathbb{P}^{n-1})$ e $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$.

$\pi^{-1}(0) = E \cong \mathbb{P}^{n-1}$ DIVISORE ECCEZIONALE (ipersuperficie analitica liscia irr.).

E ha f.d.l. $z(i)_i$ su $J\cap V_i$, $E \overset{\text{loc.}}{=} (z(i)_i)$.

$V\subseteq\mathbb{C}^n$ sottovarietà analitica, la TRASFORMATA STRETTA di V è (sottovarietà analitica di J) $\overline{\pi^{-1}(V\setminus\{0\})}$.

$0\neq v\in\mathbb{C}^n$, $l = \{\lambda v \mid \lambda\in\mathbb{C}\}$ retta in $\mathbb{C}^n$,
$\pi^{-1}(l) = \{(\lambda v, [v]) \mid \lambda\in\mathbb{C}\} \cup E$.
↳ trasformata stretta di l

La trasformata stretta di l interseca E in $(0,[v])$.

$E\cong \mathbb{P}T_0^{1*}(\mathbb{C}^n)$.

Oss.: con gli scoppiamenti si possono rimuovere le singolarità.

$x\in M$, $n = \dim M$, U intorno di x con carta olo. $\varphi: U\to V\subseteq\mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = 0$.

Rimpiazzando U con $\pi^{-1}(V)$ otteniamo lo scoppiamento di M in x
$Bl_x(M) \xrightarrow{\tilde\pi} M$ olo., $\tilde\pi^{-1}(x) = E_x$ divisore eccezionale $\cong\mathbb{P}^{n-1}\cong$
$\cong \mathbb{P}T'_x(M)$, $\tilde\pi_{|Bl_x(M)\setminus E_x}: Bl_x(M)\setminus E_x \to M\setminus\{x\}$ biolo..

Usando le coordinate olo. $z_1,\dots,z_n$ date da φ su U, sui $\tilde V_i$ abbiamo
↳ analoghi dei $J\cap V_i$
coordinate olo. $\frac{l_1}{l_i},\dots,z_i,\dots,\frac{l_n}{l_i}$ e ivi E_x ha

f.d.l. $z_i \Rightarrow [E_x]_{|\underset{\mathbb{P}^{n-1}}{\overset{\parallel}{E_x}}} \cong \mathcal{O}_{\underset{E_x}{\overset{\parallel}{\mathbb{P}^{n-1}}}}(-1) \Rightarrow [-E_x]_{|E_x} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow H^0(E_x, [-E_x]_{|E_x}) = T_x^{1*}(M)$.