$\tilde M = Bl_{x,y}(M) \xrightarrow{\pi} M$, $\pi^{-1}(x)=E_x$, $\pi^{-1}(y)=E_y$, $E=E_x+E_y \in Div(\tilde M)$.
$L\in Pic(M)$, $\tilde L = \pi^*(L)\in Pic(\tilde M)$; su $M\setminus\{x,y\}$, $L_{|M\setminus\{x,y\}} \cong \tilde L_{|\tilde M \setminus (E_x+E_y)}$.
$\tilde L_{|E_x} = E_x \times L_x$, $\tilde L_{|E_y} = E_y\times L_y \Rightarrow H^0(E_x, \tilde L_{|E_x}) = L_x$, $H^0(E_y, \tilde L_{|E_y}) = L_y$.
$\tilde L_{|E} = (E_x\times L_x)\cup(E_y\times L_y) \Rightarrow H^0(E,\tilde L_{|E}) = L_x\oplus L_y$.

$\pi^*: H^0(M,\mathcal O(L)) \to H^0(\tilde M, \mathcal O(\tilde L))$ è isomorfismo:
$\pi^*(\sigma)=0 \Rightarrow \sigma\equiv 0$ su $M\setminus\{x,y\} \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \pi^*$ ini.;
$\tilde\sigma \in H^0(\tilde M, \mathcal O(\tilde L))$ dà una sezione σ di L su $M\setminus\{x,y\} \Rightarrow$
$\underset{\text{Hartogs}}{\Rightarrow}$ si estende a σ sezione globale di L t.c. $\pi^*(\sigma)=\tilde\sigma$.

$$\begin{tikzcd} H^0(\tilde M, \mathcal O(\tilde L)) \arrow[r, "r_E"] & H^0(E, \tilde L_{|E}); \\ H^0(M, \mathcal O(L)) \arrow[u, "\pi^*"', "\wr"] \arrow[r, "r_x\oplus r_y"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & L_x\oplus L_y \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

$0\to \mathcal O_{\tilde M}(\tilde L - [E]) \to \mathcal O_{\tilde M}(\tilde L) \xrightarrow{r_E} \mathcal O_E(L_{|E}) \to 0$ esatta $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ se $H^1(\tilde M, \tilde L - [E_x] - [E_y]) = 0$, i_L è def. su tutto M e ini.
$\forall x,y\in M$, $x\neq y$.

$x\in M$, $\tilde M = Bl_x(M) \xrightarrow{\pi} M$, $E=E_x$, $\tau = \pi^*(L)$,
$\sigma\in H^0(M,\mathcal O(L))$, $\sigma(x)=0 \iff \pi^*(\sigma)\in H^0(\tilde M, \mathcal O(\tilde L))$ t.c. $\pi^*(\sigma)_{|E}=0$.
$\pi^*: H^0(M, \mathcal J_x(L)) \xrightarrow{\text{iso.}} H^0(\tilde M, \mathcal O(\tilde L - [E]))$.
$H^0(E, \mathcal O((\tilde L - [E])_{|E})) \cong L_x \otimes T'^*_x(M)$.

$$\begin{tikzcd} H^0(\tilde M, \mathcal O(\tilde L - [E])) \arrow[r, "r_E"] & H^0(E, \mathcal O((\tilde L - [E])_{|E})); \\ H^1(M, \mathcal J_M(L)) \arrow[u, "\pi^*", "\wr"'] \arrow[r, "d_x"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & L_x\otimes T'^*_x(M) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

$0\to \mathcal O_{\tilde M}(\tilde L - 2[E]) \to \mathcal O_{\tilde M}(\tilde L - [E]) \xrightarrow{r_E} \mathcal O_E((\tilde L - [E])_{|E}) \to 0$ esatta $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ se $H^1(\tilde M, \mathcal O(\tilde L - 2[E])) = 0$, r_E suri..
Quindi: $\forall x,y\in M$, $H^1(\tilde M, \mathcal O(\tilde L - [E_x] - [E_y])) = 0 \Rightarrow i_L$ embedding.

$U\subseteq M$ aperto con coordinate olo. $z_1,\dots,z_m$, $z_j = x_j + i y_j$.

	fibrati	frame su U
reali	$T_{\mathbb R}(M)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}_{j=1,\dots,m}$
	$T^*_{\mathbb R}(M)$	$\{dx_j, dy_j\}_{j=1,\dots,m}$
complessi	$T_{\mathbb C}(M)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar z_j}\right\}_{j=1,\dots,m}$
	$T^*_{\mathbb C}(M)$	$\{dz_j, d\bar z_j\}_{j=1,\dots,m}$
olomorfi	$T'(M)$	$\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\right\}_{j=1,\dots,m}$
	$T'^*(M)$	$\{dz_j\}_{j=1,\dots,m}$

Una r-forma C^∞ a valori in $\mathbb R$ su U è una sezione C^∞ su U di $\Lambda^r T^*_{\mathbb R}(M)$. Il fascio dei germi è $\mathcal A^r_{\mathbb R}(M)$.
Idem a valori in $\mathbb C$ usando $T^*_{\mathbb C}(M)$. " " " " " $\mathcal A^r(M)$.
Una r-forma C^∞ a valori in $\mathbb C$ sull'aperto $U\subseteq M$ è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di U, su U_α coordinate olo. z_α e
$\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Lambda^r T^*_{\mathbb C}(M))$, $\omega_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = \sum_{\#I+\#J=r} f_{\alpha IJ}\, dx_{\alpha,I}\wedge dy_{\alpha,J}$,
$f_{\alpha IJ}: U_\alpha \to \mathbb C$ C^∞ t.c. su $U_\alpha\cap U_\beta \neq\emptyset$ $\omega_\alpha = \omega_\beta$ (con cambio di variabile).
$\omega_\alpha(z_\alpha, \bar z_\alpha) = \sum_{\#I+\#J=r} h_{\alpha IJ}\, dz_{\alpha,I}\wedge d\bar z_{\alpha,J}$, $h_{\alpha IJ}: U_\alpha\to\mathbb C$ C^∞.
$z_\beta = H_{\alpha\beta}(z_\alpha)$, $H_{\alpha\beta}$ olo. $(\bar z_\beta = \overline{H_{\alpha\beta}(z_\alpha)})$, $dz_\beta = \sum_j \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial z_{\alpha,j}} dz_{\alpha,j}$,
$d\bar z_\beta = \sum_j \frac{\partial \bar H_{\alpha\beta}}{\partial \bar z_{\alpha,j}} d\bar z_{\alpha,j}$.
Con un po' di algebra lineare, $\Lambda^r T^*_{\mathbb C}(M) = \bigoplus_{p+q=r} \underbrace{(\Lambda^p T'^*(M)\otimes \Lambda^q(T''^*(M)))}_{\text{fibrato delle }(p,q)\text{-forme, o forme di tipo }(p,q)}$.

$\omega \overset{\text{loc.}}{=} \sum_{\substack{\#I=p,\\ \#J=q}} \overset{\to C^\infty}{a_{IJ}(z,\bar z)}\, dz_I\wedge d\bar z_J$ (indipendentemente dalle coordinate).
Il fascio dei germi è $\mathcal A^{p,q}(M) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal A^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal A^{p,q}(M)$.
$\pi^{(p,q)}: \mathcal A^r(M) \to \mathcal A^{p,q}(M)$, idem per le sezioni.
$\omega \mapsto \omega^{(p,q)}$

DIFFERENZIALE ESTERNO

$d: \mathcal A^r(M) \to \mathcal A^{r+1}(M)$ ed estendo linearmente.
$a_{IJ}\,dz_I\wedge d\bar z_J \mapsto \sum_\alpha \left(\frac{\partial a_{IJ}}{\partial z_\alpha} dz_\alpha\wedge dz_I\wedge d\bar z_J + \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \bar z_\alpha} d\bar z_\alpha \wedge dz_I\wedge d\bar z_J\right)$
$d^2=0$.

$$\begin{tikzcd} d_{|\mathcal A^{p,q}(M)}: \mathcal A^{p,q}(M) \arrow[r] \arrow[dr, "\partial_{p,q}"] \arrow[drr, bend right, "\bar\partial_{p,q}"'] & \mathcal A^{p+1,q}(M)\oplus \mathcal A^{p,q+1}(M) \arrow[d, "\pi^{(p+1,q)}"] \arrow[dr, "\pi^{(p,q+1)}"] & \\ & \mathcal A^{p+1,q}(M) & \mathcal A^{p,q+1}(M) \end{tikzcd}$$

che si estendono a $\mathcal A^r$: $\partial, \bar\partial: \mathcal A^r(M)\to\mathcal A^{r+1}(M)$, $d=\partial+\bar\partial$.

$$\begin{tikzcd} d^2: \mathcal A^{p,q}(M) \arrow[r] \arrow[r, bend right, "\partial^2"'] \arrow[rr, bend right=40, "\partial\bar\partial+\bar\partial\partial"'] \arrow[rrr, bend right=50, "\bar\partial^2"'] & \mathcal A^{p+2,q}(M)\oplus & \mathcal A^{p+1,q+1}(M)\oplus & \mathcal A^{p,q+2}(M), \; d^2=0 \Rightarrow \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \partial^2 = 0 \\ \bar\partial^2 = 0 \\ \partial\bar\partial = -\bar\partial\partial \end{cases}$.

Def.: una p-FORMA OLOMORFA su $U\subseteq M$ aperto è una sezione olo. ω su U di $\Lambda^p T'^*(M)$; $\omega \overset{\text{loc.}}{=} \sum_{\#I=p} a_I\, dz_I$, a_I olo..

ω è olo. $\iff$ è di tipo $(p,0)$ e $\bar\partial\omega = 0$.
Il fascio dei germi è $\Omega^p(M)$.
$Z^{p,q}_{\bar\partial}(M) = Ker(\bar\partial_{p,q}: \mathcal A^{p,q}(M) \to \mathcal A^{p,q+1}(M))$; la coomologia di DOLBEAULT (p,q)-esima di M è
$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = \frac{H^0(M, Z^{p,q}_{\bar\partial}(M))}{\bar\partial_{p,q-1}(H^0(M, \mathcal A^{p,q-1}(M)))}.$$

$H^{0,0}_{\bar\partial}(M) = H^0(M, \mathcal O_M)$; $H^{p,0}_{\bar\partial}(M) = H^0(M, \Omega^p(M))$.
$\mathcal A^r(M)$, $\mathcal A^{p,q}(M)$ (fasci di C^∞_M-moduli) sono aciclici.
$0\to \Omega^p(M) \hookrightarrow \mathcal A^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal A^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal A^{p,2}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal A^{p,3}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \dots$
è una risoluzione aciclica di $\Omega^p(M) \Rightarrow H^q(M, \Omega^p(M)) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$.

Teo. ($\bar\partial$-Poincaré): $\Delta_r \subseteq \mathbb C^m$ disco di raggio $r\in(0,+\infty]$ centrato in 0,
$H^{p,q}_{\bar\partial}(\Delta_r) = 0$ se $q\geq 1$ ($\bar\partial$-chiuso $\Rightarrow$ loc. $\bar\partial$-esatto);
anche con $\Delta_r\setminus\{0\}$.
Cor.: $\dim M = m$: $H^0(M, \Omega^p(M)) = H^{p,0}_{\bar\partial}(M) = 0$ se $p>m$;
$H^q(M, \mathcal O_M) = H^{0,q}_{\bar\partial}(M) = 0$ se $q>m$;
$H^q(M, \Omega^p(M)) = H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = 0$ se $p+q>2m$.
Cor.: $0\to\mathbb Z \to \mathcal O_{\mathbb C^m} \xrightarrow{\exp} \mathcal O^*_{\mathbb C^m} \to 1$ esatta $\Rightarrow$
$\Rightarrow \underset{\overset{\|}{0}}{H^q(\mathbb C^m, \mathcal O_{\mathbb C^m})} \to H^q(\mathbb C^m, \mathcal O^*_{\mathbb C^m}) \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^{q+1}(\mathbb C^m, \mathbb Z)} \Rightarrow$

$\Rightarrow H^q(\mathbb C^m, \mathcal O^*_{\mathbb C^m}) = 0$ se $q\geq 1$.
Cor.: ogni ipersuperficie analitica V di $\mathbb C^m$ è luogo di zeri (globale) di una funzione olo. (intera).