Cor.: $H^q(\mathbb{C}^n, \Omega^p(\mathbb{C}^n)) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(\mathbb{C}^n) = 0$ se $q \geq 1$,
idem con $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \Rightarrow$ se M ammette ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ con aperti biolo. a $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}\setminus\{0\})^h$ le cui intersezioni sono dello stesso tipo, $\mathcal{U}$ è aciclico per i fasci $\Omega^p(M)$. Leray $\Rightarrow$ si può usare $\mathcal{U}$ per calcolare le coomologie dei fasci $\Omega^p(M)$.

Es.: le carti affini di $\mathbb{P}^n \Rightarrow H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p(\mathbb{P}^n)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } p = q \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Dim. (di $\bar\partial$-Poincaré): $\varphi \in \Gamma(\Delta_r, \mathcal{A}^{p,q}(\mathbb{C}^n))$ t.c. $\bar\partial\varphi = 0$.

$$\varphi = \sum_{\substack{\#I=p,\\ \#J=q}} a_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar z_J = \sum_{\#I=p} dz_I \wedge \varphi_I,$$

$$\varphi_I = \sum_{\#J=q} a_{IJ}\, d\bar z_J \in \Gamma(\Delta_r, \mathcal{A}^{0,q}(\mathbb{C}^n)).$$

$\bar\partial\varphi = (-1)^p \sum_{\#I=p} dz_I \wedge \bar\partial\varphi_I$, quindi $\bar\partial\varphi = 0 \iff \bar\partial\varphi_I = 0\ \forall I$.

Se $\varphi_I = \bar\partial\eta_I$, $\varphi = \bar\partial\left((-1)^p \sum_{\#I=p} dz_I \wedge \eta_I\right)$.

Basta il caso $p=0$.

φ di tipo $(0,q)$, $q \geq 1$, $\bar\partial\varphi = 0$ su Δ_r. Se $s<r$, $\exists\, \psi \in \Gamma(\Delta_s, \mathcal{A}^{0,q}(\mathbb{C}^n))$ t.c. $\bar\partial\psi = \varphi$ su Δ_s (poi $s \to r$ limite), ovvero:
se φ è definita su un intorno aperto $\supseteq \bar\Delta_s$, φ è esatta su Δ_s.

$$\varphi = \sum_{\#J=q} \varphi_J\, d\bar z_J = \alpha \wedge d\bar z_m + \beta, \quad \alpha, \beta \text{ prive di } d\bar z_m,$$

$$\alpha = \sum_{\substack{m\in J,\\ \#J=q}} \varphi_J\, d\bar z_{J\setminus\{m\}}, \quad \beta = \sum_{\substack{m\notin J,\\ \#J=q}} \varphi_J\, d\bar z_J.$$

$$\eta = \sum_{\substack{m\in J,\\ \#J=q}} \eta_J\, d\bar z_{J\setminus\{m\}} \quad \text{dove } \eta_J = \frac{(-1)^{q-1}}{2\pi i}\int_{|w|\leq s} \varphi_J(z_1,\dots,z_{m-1},w)\frac{dw\wedge d\bar w}{w - z_m};$$

in una variabile, $g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|\leq s} \frac{f(w)\, dw\wedge d\bar w}{w-z}$ (con $f \in C^\infty$) è t.c. $\frac{\partial g}{\partial \bar z} = f$ su $\Delta_s \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial \eta_J}{\partial \bar z_m} = (-1)^{q-1}\varphi_J$ su $\Delta_s \Rightarrow \varphi - \bar\partial\eta$ non contiene $d\bar z_m$.

Adesso: $\varphi = \alpha\wedge d\bar z_{m-1} + \beta$, α, β prive di $d\bar z_{m-1}$ e $d\bar z_m$.

$$\eta_J = \frac{(-1)^{q-2}}{2\pi i}\int_{|w|\leq s} \varphi_J(z_1,\dots,z_{m-1},w,z_m)\frac{dw\wedge d\bar w}{w-z_{m-1}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial\eta_J}{\partial\bar z_{m-1}} = (-1)^{q-2}\varphi_J$ su $\Delta_s \Rightarrow \varphi - \bar\partial\eta$ non contiene $d\bar z_{m-1}$, ma neanche $d\bar z_m$:

$$\bar\partial\eta = (\dots) + \sum_{\substack{m-1\in J,\\ \#J=q}} \frac{\partial\eta_J}{\partial\bar z_m}\, d\bar z_m \wedge d\bar z_{J\setminus\{m-1\}},$$

$0 = \bar\partial\varphi = \bar\partial\alpha\wedge d\bar z_{m-1} + \bar\partial\beta$, dove $\bar\partial\beta$ non contiene termini con $d\bar z_{m-1}\wedge d\bar z_m$;

$\bar\partial\alpha\wedge d\bar z_{m-1}$ contiene $\sum_{\substack{m-1\in J,\\ \#J=q}} \frac{\partial\varphi_J}{\partial\bar z_m}\, d\bar z_m\wedge d\bar z_{J\setminus\{m-1\}}\wedge d\bar z_{m-1} \Rightarrow \frac{\partial\varphi_J}{\partial\bar z_m} = 0$ se $m-1\in J \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\partial\eta_J}{\partial\bar z_m} = 0$ se $m-1\in J$. Poi induzione. $\square$

$\varphi: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ prodotto hermitiano,
$\exists!\, H \in \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ t.c. $\varphi(v,w) = v^T H \bar w$, $H^T = \bar H$ $\forall v,w\in\mathbb{C}^n$.
$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \rightsquigarrow \varphi: \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ bilineare.
$\mathfrak{Re}\,\varphi: \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ prodotto scalare (def. pos. $\iff \varphi$ def. pos.),
$\mathfrak{Im}\,\varphi: \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ alternante (2-forma).

$H = A + iB$, $A, B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$, $A = A^T$, $B = -B^T$.
$z = x+iy$, $w = u+iv$, $x,y,u,v\in\mathbb{R}^n$ ($z,w\in\mathbb{C}^n$),

$$z^T H \bar w = (x^T\ \ y^T)\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix}}_{\text{matrice di } \mathfrak{Re}\,\varphi} + i\underbrace{\begin{pmatrix} B & -A \\ A & B\end{pmatrix}}_{\text{matrice di } \mathfrak{Im}\,\varphi}\Bigg)\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}.$$

Def.: M var. comp., una METRICA HERMITIANA su M è il dato di un prodotto hermitiano def. pos. $(\ ,\ )_z$ su $T'_z(M)$ $\forall z\in M$ che varia in modo C^∞ con z, cioè $h_{ij}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right)_z$, $h_{ij}: U \to \mathbb{C}$ C^∞. $h_{ij} = \overline{h_{ji}}$ e $H = (h_{ij})$ è def. pos..

Oss.: le metriche hermitiane esistono, perché esistono loc. come pull-back della metrica standard su $\mathbb{C}^n$ via una carta olo. + partizioni dell'unità.

$(V, +, \cdot)$ s.v. su $\mathbb{C}$, $\bar V = V$, $(\bar V, +, \odot)$, $\lambda\odot v = \bar\lambda\cdot v$ s.v. su $\mathbb{C}$.
$v_1,\dots,v_n$ base di $V \Rightarrow \bar v_1 = v_1, \dots, \bar v_n = v_n$ base di $\bar V$.
Se $v\in V$, $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, $\bar v = \sum_{i=1}^n \bar\lambda_i \bar v_i$, otteniamo
$\bar{\ }: V \to \bar V$ isomorfismo $\mathbb{C}$-lineare.

$$\begin{tikzcd} V\otimes\bar V \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ V\times V \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\phi"'] & Z \end{tikzcd}$$

$\forall\,\phi: V\times V\to Z$ sesquilineare $\exists!\, f: V\otimes\bar V \to Z$ lineare t.c. $\phi = f\circ\pi$.

ϕ sesquilineare $\Rightarrow$ è bilineare $V\times\bar V \to Z$

$$\begin{tikzcd} T'_z(M)\otimes T''_z(M) \arrow[dr, "ds^2_z"] & \\ T'_z(M)\times T'_z(M) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "(\ ,\ )_z"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$ds^2_z \in (T'_z(M)\otimes T''_z(M))^* = T'^*_z(M)\otimes T''^*_z(M)$, e ci dà una sezione globale C^∞ ds^2 di $T'^*(M)\otimes T''^*(M)$.

In termini del coframe $\{dz_i\otimes d\bar z_j\}_{i,j=1,\dots,n}$,

$$ds^2 \overset{\text{loc.}}{=} \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\, dz_i\otimes d\bar z_j \text{ con le } h_{ij}\ C^\infty,\ h_{ij} = \overline{h_{ji}}.$$

$$h_{ij}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right)_z = ds^2_z\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial\bar z_j}\right).$$

Def.: un FRAME UNITARIO per la metrica hermitiana su $U\subseteq M$ aperto è un frame $\rho_1,\dots,\rho_n$ di $T'(M)$ su U t.c. $\forall z\in U$ $(\rho_i,\rho_j)_z = \delta_{ij}$.
Un COFRAME UNITARIO ... (basi duali dei frame unitari): è un frame $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ di $T'^*(M)$ t.c. $ds^2 = \sum_{i=1}^n \varphi_i\otimes\bar\varphi_i$.

Oss.: frame e coframe unitari esistono (Gram-Schmidt).

$\mathfrak{Re}\, ds^2$ dà un prodotto scalare def. pos. su ogni $T_{\mathbb{R},z}(M) \overset{\text{su } \mathbb{R}}{\cong} T'_z(M)$ che varia in modo C^∞ con il punto, cioè una metrica riemanniana su M.
$\mathfrak{Im}\, ds^2$ dà una 2-forma C^∞ globale reale.
$\omega = -\frac{1}{2}\mathfrak{Im}\, ds^2$ è la $(1,1)$-forma associata alla metrica H.
Se nella base $\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}$ i coefficienti di ds^2 sono $h_{ij} = a_{ij} + i b_{ij}$ (a_{ij}, b_{ij} reali), nella base $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}$ $\mathfrak{Im}\, ds^2$ ha matrice $\begin{pmatrix} B & -A \\ A & B\end{pmatrix}$. $\mathfrak{Im}\, ds^2 = \sum_{i,j}(b_{ij}(dx_i\otimes dx_j + dy_i\otimes dy_j)) + \sum_{i,j}(a_{ij}(-dx_i\otimes dy_j + dy_j\otimes dx_i)) =$

$= 2\sum_{i<j} b_{ij}(dx_i\wedge dx_j + dy_i\wedge dy_j) + 2\sum_{i<j} a_{ij}(dy_j\wedge dx_i + dy_i\wedge dx_j) + 2\sum_i a_{ii}\, dy_i\wedge dx_i =$ robe con dz_i, $d\bar z_j$, ma solo di tipo $(1,1)$.