$$\omega = \frac{1}{2}\sum h_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

In termini di un coframe unitario $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $\varphi_j = \alpha_j + i\beta_j$,

$$ds^2 = \sum_{j=1}^n \varphi_j \otimes \bar{\varphi}_j = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + i\beta_j) \otimes (\alpha_j - i\beta_j) =$$
$$= \underbrace{\sum_{j=1}^n (\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j)}_{Re(ds^2)} + i \underbrace{\sum_{j=1}^n (-\alpha_j \otimes \beta_j + \beta_j \otimes \alpha_j)}_{Im(ds^2)}.$$

$$\omega = \sum_{j=1}^n \alpha_j \wedge \beta_j, \quad \varphi_j \wedge \bar{\varphi}_j = -2i\alpha_j \wedge \beta_j \Rightarrow \omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \varphi_j \wedge \bar{\varphi}_j.$$

$\omega(v, \bar{v}) = \frac{i}{4} ds^2(v, \bar{v}) = \frac{i}{4}\underbrace{(v, v)}_{>0} \Rightarrow -i\omega(v, \bar{v}) > 0$
$\forall v \in T'_z(M)$, $v \neq 0$, $z \in M$, cioè è una (1,1)-forma POSITIVA.

Viceversa, una (1,1)-forma ω reale positiva induce una metrica hermitiana su M la cui (1,1)-forma è ω.

$$\omega \overset{loc.}{=} \frac{i}{2}\sum \underset{C^\infty}{h_{ij}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j = \sum_{i<j} i\, \frac{h_{ij} - h_{ji}}{2}(dx_i \wedge dx_j - dy_i \wedge dy_j) +$$
$$+ \sum_{i,j} \frac{h_{ij} + h_{ji}}{2} dx_i \wedge dy_j \Rightarrow i\,\frac{h_{ij} - h_{ji}}{2}, \frac{h_{ij} + h_{ij}}{2} \in \mathbb{R}.$$

$i = j$ ok. $i \neq j$: troviamo $h_{ij} = \bar{h}_{ji} \Rightarrow H = (h_{ij})$ hermitiana $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow ds^2 = \sum h_{ij}\, dz_i \otimes d\bar{z}_j$. Ci manca H def. positiva, ma ragionando come prima, $\omega(v, \bar{v}) = \frac{1}{4} ds^2(v, \bar{v})$.

Es.: su $\mathbb{C}^n$, la metrica euclidea $ds^2 = \sum_{j=1}^n dz_j \otimes d\bar{z}_j$, $\omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j =$
$= \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$. Oss.: $d\omega = 0$.

Su $\mathbb{P}^n$: $\pi: \mathbb{C}^{n+1}_{z_0, \dots, z_n} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{z_0, \dots, z_n}$. $U \subseteq \mathbb{P}^n$ aperto,
$z: U \to \mathbb{C}^{n+1}$ sezione olo. di π su U; su U, $\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log|z|^2$.

Se prendo $z': U' \to \mathbb{C}^{n+1}$ sezione olo. di π su U', su $U \cap U' \neq \emptyset$
$z' = fz$, $f: U \cap U' \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olo..

$$\omega' = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\log|z'|^2 = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}(\log f + \log \bar{f} + \log|z|^2) =$$
$$= \omega + \frac{i}{2\pi}(\partial\underbrace{\bar{\partial}\log f}_{=0} - \bar{\partial}\underbrace{\partial\log\bar{f}}_{=0}) = \omega.$$

Se ω è positiva, definisce la metrica di Fubini-Study su $\mathbb{P}^n$.
$U(n+1)$ agisce transitivamente su $\mathbb{P}^n$ e fissa $\omega \Rightarrow$
$\Rightarrow \omega$ è positiva se e solo se lo è in un pto.
$P = [1, 0, \dots, 0] \in U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ con coordinate $w_i = \frac{z_i}{z_0}$;
usiamo la sezione di π $z: (w_1, \dots, w_n) \mapsto (1, w_1, \dots, w_n)$.

Su U_0, $\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log(1 + \sum_{i=1}^n w_i \bar{w}_i) = \frac{i}{2\pi}\partial\left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i\, d\bar{w}_i}{1 + \sum_{i=1}^n w_i \bar{w}_i}\right) =$

$$= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\sum dw_i \wedge d\bar{w}_i}{1 + \sum w_i \bar{w}_i} - \frac{(\sum \bar{w}_i\, dw_i) \wedge (\sum w_i\, d\bar{w}_i)}{(1 + \sum w_i \bar{w}_i)^2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \omega(P) = \frac{i}{2\pi}\sum dw_i \wedge d\bar{w}_i$ positiva. Oss.: $d\omega = 0$.

$f: N \to M$ olo. tra var. comp. t.c. df_z ini. $\forall z \in N$,
ds^2 metrica hermitiana su M induce una metrica hermitiana su N
$(v, w)_z = (df_z(v), df_z(w))_{f(z)}$; ha (1,1)-forma $f^*(\omega)$.

Es.: $S \hookrightarrow M$ sottovar. comp., ds^2 si induce su S con (1,1)-forma $\omega_{|S}$.

$ds^2 = \sum \varphi_j \otimes \bar{\varphi}_j$, $\varphi_j = \alpha_j + i\beta_j$, $Re(ds^2) = \sum(\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j)$;
ha elemento di volume $\Phi = \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n$. $\omega^n = n!\,\Phi$.

Es.: $\Phi_S = \frac{\omega^k_{|S}}{k!}$ ($\Rightarrow Vol(S) = \frac{1}{k!}\int_S \omega^k$).

$S \subseteq M$ sottovar. analitica irr. di dim k, $sing(S)$ ha codim. reale ≥ 2,
quindi si può definire $\int_S \underset{2k\text{-forma}}{\varphi} = \int_{S^*} \varphi = \int_{S^*} \varphi^{(k,k)}$.
ragionando sulla dimensione

Vale Stokes: $\int_S d\varphi = 0$.

ds^2 metrica hermitiana su M, $\forall z \in M$ induce prodotti hermitiani def. positivi sulla fibra in z di $\Lambda^p T'^*(M) \otimes \Lambda^q T''^*(M)$.
$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ coframe unitario per ds^2; dichiaro $\{d\varphi_I(z) \wedge d\bar{\varphi}_J(z)\}_{\substack{\#I=p \\ \#J=q}}$ base ortogonale di norma $(\sqrt{2})^{p+q}$. È ben def. poiché i cambi di base tra coframe unitari sono unitari.

$$\Phi = \frac{\omega^n}{n!} = \left(\frac{i}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \bar{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\varphi}_n \Rightarrow (\Phi, \Phi)_z = 1.$$

Definiamo un prodotto hermitiano def. positivo su $H^0(M, \mathcal{A}^{p,q}(M))$,
$$(\psi, \eta) = \int_M (\psi(z), \eta(z))_z\, \Phi(z).$$

Aggiunto di $\bar{\partial}$: $(\underset{\mathcal{A}^{p,q}}{\psi}, \underset{\mathcal{A}^{p,q-1}}{\bar{\partial}\eta}) = (\bar{\partial}^*\psi, \eta)$, $\bar{\partial}^*: \mathcal{A}^{p,q} \to \mathcal{A}^{p,q-1}$.

$$\underset{\text{di Hodge}}{*}: H^0(M, \mathcal{A}^{p,q}(M)) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{A}^{n-p,n-q}(M)).$$
$$\eta \longmapsto *\eta$$

Vogliamo $(\psi(z), \eta(z))_z\, \Phi(z) = \psi(z) \wedge *\eta(z)$, cioè
$$(\psi, \eta) = \int_M \psi \wedge (*\eta).$$

$$\eta \overset{loc.}{=} \sum_{I,J} \eta_{IJ}\, \varphi_I \wedge \bar{\varphi}_J, \quad *\eta \overset{loc.}{=} i^n\, 2^{p+q-n} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{I,J} \varepsilon_{IJ}\, \bar{\eta}_{IJ}\, \varphi_{I^c} \wedge \bar{\varphi}_{J^c},$$

ε_{IJ} è il segno di un'opportuna permutazione. È ben def. e funziona.
Oss.: $**\eta = (-1)^{p+q}\eta$, $*1 = \Phi$.
$\bar{\partial}^* = -*\bar{\partial}*$.

$$(\bar{\partial}\psi, \eta) = \int_M \bar{\partial}\psi \wedge *\eta = (-1)^{p+q}\int_M \psi \wedge \bar{\partial}*\eta + \int_M \bar{\partial}\underbrace{(\psi \wedge *\eta)}_{\text{di tipo } (n,n-1)} =$$
di tipo $(n, n-1)$, dove $d = \bar{\partial} \Rightarrow$
$\underset{\text{Stokes}}{\Rightarrow}$ viene 0

$$= (-1)^{p+q}\int_M \psi \wedge \bar{\partial}*\eta =$$
$$= (-1)^{p+q}(-1)^{n-p+n-q+1}\int_M \psi \wedge **\bar{\partial}*\eta =$$
$$= \int_M \psi \wedge *(-*\bar{\partial}*\eta) = (\psi, \bar{\partial}^*\eta).$$

Oss.: $(\bar{\partial}^*)^2 = 0$.

Def. il laplaciano di $\bar{\partial}$ è $\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ autoaggiunto.
$\Delta_{\bar{\partial}}\psi = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}\psi = \bar{\partial}^*\psi = 0$:
($\Leftarrow$) ovvia. ($\Rightarrow$) $(\Delta_{\bar{\partial}}\psi, \psi) = (\bar{\partial}\bar{\partial}^*\psi, \psi) + (\bar{\partial}^*\bar{\partial}\psi, \psi) =$
$= (\bar{\partial}^*\psi, \bar{\partial}^*\psi) + (\bar{\partial}\psi, \bar{\partial}\psi) = \|\bar{\partial}^*\psi\|^2 + \|\bar{\partial}\psi\|^2$.

Se $\Delta_{\bar{\partial}}\psi = 0$, ψ si dice ARMONICA.
Le forme globali armoniche di tipo (p, q) si indicano con
$\mathcal{H}^{p,q}(M) \subseteq H^0(M, Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(M))$.

Lemma: $\psi \in H^0(M, Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(M))$ ha norma minima nella sua classe di coomologia di Dolbeault $[\psi] = [\psi + \bar{\partial}\eta] \Leftrightarrow$ è armonica.

Dim.: ($\Leftarrow$) $\forall \eta \in H^0(M, \mathcal{A}^{p,q-1}(M))$, $\bar{\partial}\eta \neq 0$,
$$\|\psi + \bar{\partial}\eta\|^2 = (\psi + \bar{\partial}\eta, \psi + \bar{\partial}\eta) = \|\psi\|^2 + \underbrace{\|\bar{\partial}\eta\|^2}_{\neq 0} + 2\,Re\underbrace{(\psi, \bar{\partial}\eta)}_{= (\bar{\partial}^*\psi, \eta) = 0} > \|\psi\|^2.$$

($\Rightarrow$) $\forall \eta \in \dots$, $0 \overset{\|\psi\|^2 \text{ minimo}}{=} \frac{d}{dt}\|\psi + t\bar{\partial}\eta\|^2_{|t=0} = 2\,Re(\psi, \bar{\partial}\eta)$,
$$0 = \frac{d}{dt}\|\psi + t i\bar{\partial}\eta\|^2_{|t=0} = 2\,Im(\psi, \bar{\partial}\eta) \Rightarrow$$
$\Rightarrow 0 = (\psi, \bar{\partial}\eta) = (\bar{\partial}^*\psi, \eta)$ $\forall \eta \Rightarrow \bar{\partial}^*\psi = 0$, ma $\bar{\partial}\psi = 0$. $\square$

In ogni classe di coomologia di Dolbeault, se $\exists$ un rappresentante armonico, è unico.

Operatori compatti autoaggiunti su spazi di Hilbert $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dim \mathcal{H}^{p,q}(M) < +\infty$.