E fibrato complesso su M var. comp., una k-forma ω a valori in E è una sezione C^∞ di $\Lambda^k T^*_{\mathbb{C}}(M)\otimes E$.

$$\omega \overset{\text{loc.}}{=} \underset{\substack{k\text{-forma}\\ \text{su } M}}{\eta}\otimes\sigma = \sum_{i=1}^{m} \underset{\substack{k\text{-forma}\\ \text{su } M}}{\eta_i}\otimes \underset{\text{frame per } E}{\rho_i},$$ il fascio è $\mathcal{A}^k(E)$.

Idem per le (p,q)-forme a valori in E, il fascio è $\mathcal{A}^{p,q}(E)$.

$$\Lambda_E : \mathcal{A}^{p,q}(E)\times\mathcal{A}^{p',q'}(E^*) \longrightarrow \mathcal{A}^{p+p',q+q'}(M).$$
$$(\eta\otimes\sigma,\ \eta'\otimes\sigma') \longmapsto \sigma'(\sigma)\,\eta\wedge\eta'$$

Se E è olo., $\bar\partial_E : \mathcal{A}^{p,q}(E)\to\mathcal{A}^{p,q+1}(E)$, se $\rho_1,\dots,\rho_m$ è un frame olo. di E, $\eta=\sum\eta_i\otimes\rho_i$, $\bar\partial_E\eta=\sum\bar\partial\eta_i\otimes\rho_i$.

E olo., una p-forma olo. a valori in E è una sezione olo. di $\Lambda^p T^{1*}(M)\otimes E$: $\rho_1,\dots,\rho_m$ frame olo. di E, $\omega=\sum \underset{p\text{-forme olo. su } M}{\omega_i}\otimes\rho_i$. Il fascio è $\Omega^p(E) = \operatorname{Ker}\bar\partial_E\cap\mathcal{A}^{p,0}(E)$.

Oss.: $(\bar\partial_E)^2=0 \rightsquigarrow$ coomologia di Dolbeault a valori in E,
$$H^{p,q}_{\bar\partial_E}(M)\cong H^q(M,\Omega^p(E)).$$

Una metrica hermitiana su E è il dato $\forall p\in M$ di $(\ ,\ )_p$ prodotto hermitiano def. pos. che varia C^∞ con p.

$\rho_1,\dots,\rho_m$ è frame unitario di E se $\forall p$ $\rho_1(p),\dots,\rho_m(p)$ è base unitaria di E_p rispetto a $(\ ,\ )_p$.

Fissata una metrica hermitiana su M e una su E, definiamo $(\ ,\ )$ prodotto herm. def. pos. su $H^0(M,\mathcal{A}^{p,q}(E))$.

$\forall x\in M$, $\rho_1,\dots,\rho_m$ frame unitario per E, $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ per M (in un intorno di x), $\{\varphi_I(x)\wedge\bar\varphi_J(x)\otimes\rho_\alpha(x)\}_{\substack{\#I=p\\ \#J=q\\ \alpha=1,\dots,m}}$ è base ortogonale di norma $\sqrt{2}^{\,p+q} \rightsquigarrow (\ ,\ )_x$.

$\psi,\eta\in H^0(M,\mathcal{A}^{p,q}(E))$, $(\psi,\eta)=\int_M(\psi(x),\eta(x))_x\,\Phi(x) =$
$=\int_M\psi\wedge_E *_E\eta$, dove $*_E : H^0(M,\mathcal{A}^{p,q}(E))\longrightarrow H^0(M,\mathcal{A}^{n-p,n-q}(E))$,

$\eta=\sum\eta_\alpha\otimes\rho_\alpha$, $*_E\eta=\sum *\eta_\alpha\otimes\rho^*_E$.

$\bar\partial_E$ ha un aggiunto $\bar\partial_E^* = (-1)^{p+q}*_E^{-1}\bar\partial_{E^*}*_E$.

$\Delta_{\bar\partial_E}=\bar\partial_E\bar\partial_E^*+\bar\partial_E^*\bar\partial_E \rightsquigarrow \mathcal{H}^{p,q}(E)=\operatorname{Ker}\Delta_{\bar\partial_E}\cap H^0(M,\mathcal{A}^{p,q}(E))$,
- $\dim\mathcal{H}^{p,q}(E)<+\infty$;
- $\mathcal{H}^{p,q}(E)\cong H^{p,q}_{\bar\partial_E}(M)$;
- (Kodaira-Serre) $H^q(M,\Omega^p(E))\cong H^{n-q}(M,\Omega^{n-p}(E^*))$.

In particolare, $H^q(M,\mathcal{O}(E))\cong H^{n-q}(M,\Omega^n(E^*))$, $K_M=\det T^{1*}(M) = \Lambda^n T^{1*}(M)$, $\Omega^n(M)=\mathcal{O}(K_M)$, $\mathcal{O}(E\otimes K_M)=\Omega^n(E)$, $\mathcal{O}(E)=\Omega^n(E\otimes K_M^*)$.

Es.: $K_{\mathbb{P}^n}=?$ Su U_0 $x_1,\dots,x_n$ $\frac{dx_1}{x_1}\wedge\dots\wedge\frac{dx_n}{x_n}$ è meromorfa con polo semplice su ogni iperpiano coordinato $\Rightarrow K_{\mathbb{P}^n}=\mathcal{O}(-n-1)$.

Def.: una CONNESSIONE su E è $D:\mathcal{A}^0(E)\to\mathcal{A}^1(E)$ morfismo di fasci t.c. $D(\underset{C^\infty}{f}\ \underset{\text{sezione di } E}{\sigma})=df\otimes\sigma+fD(\sigma)$.

$$\mathcal{A}^1(E)=\mathcal{A}^{1,0}(E)\oplus\mathcal{A}^{0,1}(E)\rightsquigarrow D=D'+D''.$$

Se E è olo., D si dice compatibile con la struttura complessa se $D''=\bar\partial_E$.
Se E ha metrica herm., D " " " " metrica se $\forall x\in M$
$$d(\sigma(x),\tau(x))_x=(D\sigma,\tau)_x+(\sigma,D\tau)_x.$$

$\exists!$ connessione compatibile con entrambe: la connessione metrica.

D si estende a $D:\mathcal{A}^p(E)\to\mathcal{A}^{p+1}(E)$, $D(\underset{\substack{p\text{-forma}\\ \text{su } M}}{\psi}\otimes\underset{\substack{\text{sezione}\\ \text{di } E}}{\sigma})=d\psi\otimes\sigma+(-1)^p\psi\wedge D\sigma$.

$\underset{D'+D''}{\overset{}{D}} : \mathcal{A}^{p,q}(E)\to\mathcal{A}^{p+1,q}(E)\oplus\mathcal{A}^{p,q+1}(E)$, se D conn. metrica $D''=\bar\partial_E$.

Operatore di curvatura: $D^2:\mathcal{A}^0(E)\to\mathcal{A}^2(E)$.

$\rho_1,\dots,\rho_m$ frame per E, $D^2\rho_i=\sum_{i=1}^{m}\Theta_{ij}\otimes\rho_j$; Θ matrice di curvatura $m\times m$ di 2-forme

$\rho_i'=\sum g_{ij}\rho_j \Rightarrow \Theta'=g\Theta g^{-1}$.

Oss.: D conn. metrica $\Rightarrow\Theta$ di tipo $(1,1)$.

Se E è un line bundle, $\Theta'=\Theta$:
1) Θ dà una 2-forma globale ($(1,1)$-forma se D conn. metrica);
2) Θ è chiusa ($\Theta\overset{\text{loc.}}{=}d\theta+\theta\wedge\theta$, θ matrice di D);
3) l'estensione di D^2 nel caso metrico ($D^2:\mathcal{A}^{p,q}(E)\to\mathcal{A}^{p+1,q+1}(E)$), $D^2\eta=\eta\wedge\Theta$;
4) $[\Theta]\in H^2_{DR}(M)$ non dipende dalla metrica; $[\frac{i}{2\pi}\Theta]=c_1(E)\in H^2(M,\mathbb{Z})$.

M di Kähler, $L\in\operatorname{Pic}(M)$, $(1,1)$-forma $\omega\in[c_1(L)]\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists$ metrica herm. su L con curvatura della conn. metrica $\Theta=\frac{2\pi}{i}\omega$.

Def.: $L\in\operatorname{Pic}(M)$ si dice POSITIVO se $\exists$ su L una metrica herm. con curvatura della conn. metrica Θ t.c. $\frac{i}{2\pi}\Theta$ è una $(1,1)$-forma positiva.

Es.: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ è positivo: $\exists$ metrica con $\Theta=\partial\bar\partial\log|z|^2$, $\frac{i}{2\pi}\Theta=$ Fubini-Study.

Ogni $(1,1)$-forma ω intera chiusa è c_1 di un line bundle.

$$\begin{tikzcd}
H^1(M,\mathcal{O}^*_M) \arrow[r, "c_1"] & H^2(M,\mathbb{Z}) \ni \omega \arrow[r, mapsto, "?"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & 0\in H^2(M,\mathcal{O}_M) \arrow[dd, "\parallel"] \\
& H^2(M,\mathbb{C}) \arrow[d, "\cong"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \\
& H^2_{DR}(M)\ni\omega \arrow[r, "\pi^{(0,2)}"] & H^{0,2}_{\bar\partial}(M)
\end{tikzcd}$$

$L\in\operatorname{Pic}(M)$ è positivo $\Leftrightarrow c_1(L)$ si rappresenta con una $(1,1)$-forma reale, chiusa, positiva.

M di Kähler, con $(1,1)$-forma ω, $L_E:\mathcal{A}^{p,q}(E)\to\mathcal{A}^{p+1,q+1}(E)$, $L_E(\eta\otimes\sigma)=(\eta\wedge\omega)\otimes\sigma$. Se E ha metrica herm., Λ_E aggiunto di L_E, D conn. metrica, $D=D'+\bar\partial_E$ su $\mathcal{A}^{p,q}(E)$, $[\Lambda_E,\bar\partial_E]=-\frac{1}{2}D'^*$, $[\Lambda_E,L_E]=(n-p-q)\,\mathrm{id}$.

Teo. (Kodaira vanishing): M Kähler, $L\in\operatorname{Pic}(M)$ positivo.
$H^q(M,\Omega^p(L))=0\ \forall p,q$ t.c. $p+q>n=\dim M$.

Dim.: ω $(1,1)$-forma reale chiusa positiva che rappresenta $c_1(L)$,
$\exists$ su L metrica herm. con curvatura della conn. metrica $\Theta=\frac{2\pi}{i}\omega$,
$\exists$ su M " " " $(1,1)$-forma ω,
$H^q(M,\Omega^p(L))=\mathcal{H}^{p,q}(L)=0$.
$D^2\eta=\eta\wedge\Theta=\frac{2\pi}{i}L_E\eta$. $\eta\in\mathcal{H}^{p,q}(L)\Leftrightarrow\bar\partial_E\eta=0=\bar\partial_E^*\eta$.
Θ è $(1,1)\Rightarrow D'^2=0\Rightarrow D^2=D'\bar\partial_E+\bar\partial_E D'\Rightarrow D^2\eta=\bar\partial_E D'\eta$.
$2i(\Lambda_E D^2\eta,\eta)=2i(\Lambda_E\bar\partial_E D'\eta,\eta)=2i((\bar\partial_E\Lambda_E-\frac{1}{2}D'^*)D'\eta,\eta)=$
$=2i(\Lambda_E D'\eta,\underset{0}{\bar\partial_E^*\eta})+(D'\eta,D'\eta)\geq 0$.

$2i(D^2\Lambda_E\eta,\eta)=2i(D'\bar\partial_E\Lambda_E\eta,\eta)=-(D'^*\eta,D'^*\eta)\leq 0$.

Allora $2i([\Lambda_E,\underset{\frac{2\pi}{i}L_E}{D^2}]\eta,\eta)\geq 0\Rightarrow 4\pi(\underset{4\pi(n-p-q)(\eta,\eta)}{[\Lambda_E,L_E]\eta,\eta})\geq 0$,
quindi $n-p-q<0\Rightarrow\eta=0$. □

Teorema B: $L\in\operatorname{Pic}(M)$ positivo, $\forall E\in\operatorname{Pic}(M)\ \exists\mu_0>0$ t.c. $\forall\mu\geq\mu_0$ $H^q(M,\mathcal{O}(L^\mu\otimes E))=0\ \forall q\geq 1$.

Dim. (idea): vedi dispense. □

Cor.: $M\subseteq\mathbb{P}^n$ sottovar. comp. $\Rightarrow\operatorname{Pic}(M)=\operatorname{Im}[\ ]$.

Dim.: sia H la restrizione a M di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. $L\in\operatorname{Pic}(M)$, $\mu\gg 0$,
$L\otimes H^\mu$ positivo $\overset{*}{\Rightarrow}$ ha sezione olo. $s\neq 0$, t sezione di H non nulla $\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{s}{t^\mu}$ sezione mero. di L.

$*$: per Bertini, $\exists\,\mathbb{P}^{n-1}\subseteq\mathbb{P}^n$ t.c. $\mathbb{P}^{n-1}\cap M=V$ sottovar. comp. (liscia).
$$0\to\mathcal{O}_M(L+(\mu-1)H)\to\mathcal{O}_M(L+\mu H)\xrightarrow{\ \pi_{|V}\ }\mathcal{O}_V((L+\mu H)_{|V})\to 0,$$
se $\mu\gg 0$ $H^0(V,\mathcal{O}_V((L+\mu H)_{|V}))=0$; teo. B $\Rightarrow$
$\Rightarrow H^1(M,\mathcal{O}_M(L+(\mu-1)H))=0$,
$$\underset{\neq 0}{H^0(M,\mathcal{O}_M(L+\mu H))}\to\underset{\neq 0}{H^0(V,\mathcal{O}_V((L+\mu H)_{|V}))}\to 0.\ \square$$

Teo. (Kodaira embedding): $L\in\operatorname{Pic}(M)$ positivo, se $k\gg 0$ L immerge M in $\mathbb{P}^n$.

Dim.: $\forall x,y\in M$, $\pi:\tilde M\to M$ scoppiamento di M in x e y,
$x\neq y$, $H^1(\tilde M,\pi^*(kL)-[E])=0$, $E=E_x+E_y$;
$\forall x\in M$, $\pi:\tilde M\to M$ " " M " x,
$H^1(\tilde M,\pi^*(kL)-2[E])=0$, $E=E_x$.

$\exists\,k_0$ t.c. $\pi^*(kL)-n[E]$ positivo $\forall k\geq k_0$,
$\exists\,k_1$ t.c. $kL-K_M$ positivo $\forall k\geq k_1$.
$k>k_1+k_0$, $\mathcal{O}_{\tilde M}(\pi^*(kL)-[E])\overset{(1)}{}=\Omega^n_{\tilde M}(\pi^*(kL)-[E]-K_{\tilde M})\overset{(2)}{}$,
$K_{\tilde M}=\pi^*(K_M)+(n-1)E$, $\Omega^n_{\tilde M}(\pi^*(kL)-\pi^*(K_M)-n[E])=$
$=\Omega^n_{\tilde M}(\underbrace{(\pi^*(k_1L)-\pi^*(K_M))}_{\text{positivo}}\otimes\underbrace{(\pi^*(k-k_1)L-n[E])}_{\text{positivo}})$,

$H^1((1))=H^1((2))=0$. □

Teo.: M var. comp. cpt, è algebrica $\Leftrightarrow\exists$ su M una $(1,1)$-forma razionale, chiusa positiva.