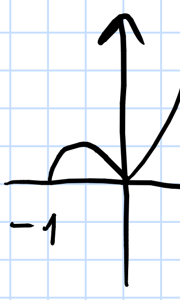
Introduzione

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$.

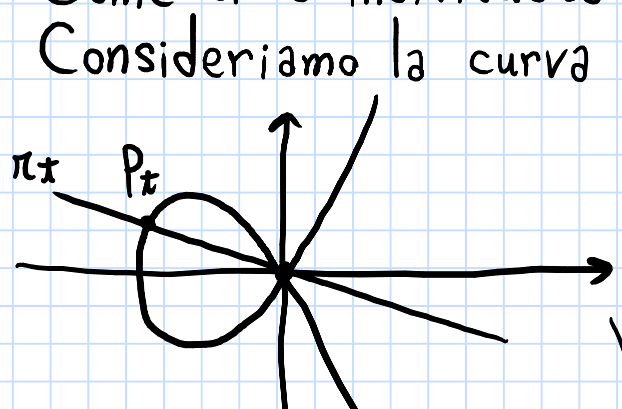


Problema: calcolare $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Sol.: $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$.

Come si è individuata questa sostituzione?

Consideriamo la curva piana $C=\{y^2=x^3+x^2\}$.



Consideriamo il fascio di rette per O $\{\pi_t\}=\{y=tx\}$ (stiamo vaghi sul dominio del parametro).

$\forall t\ C\cap\pi_t=\begin{cases} O & \text{con molt. } 2\\ P & \text{con molt. } 1\end{cases}$ (per Bézout).

Calcolo esplicito: $\begin{cases} y^2=x^3+x^2\\ y=tx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0,\ y=0 & \text{con molt. } 2\\ t^2=x+1 \Rightarrow\end{cases}$

$\Rightarrow x=t^2-1,\ y=t(t^2-1)$.

Conclusione: $\exists$ una mappa "birazionale" $\mathbb{A}^1 \to C$, $t\mapsto (t^2-1, t(t^2-1))$.

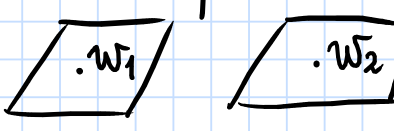
È isomorfismo per $P\neq(0,0)$.

Origini Geometria Algebrica (~ 1860)

Integrali abeliani: $\int_\gamma R(z,w(z))\,dz$ dove γ è un cammino in $\mathbb{C}$, $R=p/q$ è una funzione razionale e z e $w(z)$ verificano una relazione polinomiale.

Idea di Riemann: costruzione di una superficie di Riemann (sdR) associata a una curva piana.

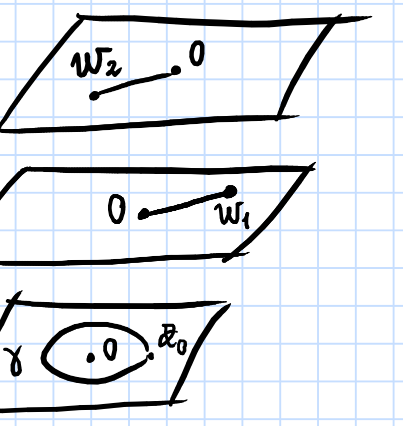
Es.: 1) in $\mathbb{C}^2$ con coordinate (z,w), $C: z=w^2$. $\forall z\neq 0\ \exists$ due sol. $w_1=\sqrt{z}$, $w_2=-\sqrt{z}$ $\Rightarrow$ prendiamo due copie di $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}(w_1)$, $\mathbb{C}(w_2)$:



Costruzione locale:

- i due "fogli" in 0 devono incollarsi;
- esiste un'azione di monodromia legata al rivestimento (ramificato) $C \xrightarrow{2:1} \mathbb{A}^1$, $(z,w)\mapsto z$.

Nel dettaglio, $z_0=\rho_0 e^{i\theta_0}$ con $\rho_0\neq 0$, $w_1=\sqrt{\rho_0}\,e^{i\frac{\theta_0}{2}}$, $w_2=\sqrt{\rho_0}\,e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi)}$. Consideriamo $\gamma(t)=\rho_0 e^{i(\theta_0+2\pi t)}$, $t\in[0,1]$ cammino intorno a 0

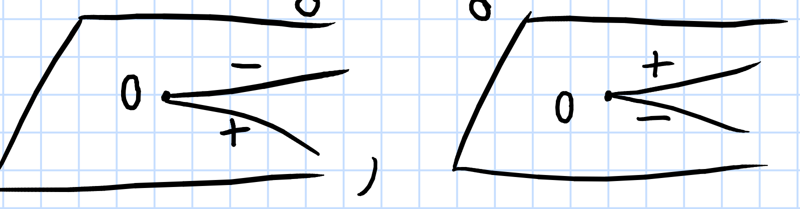


$\rightsquigarrow w_1(t)=\sqrt{\rho_0}\,e^{i\left(\frac{\theta_0+2\pi t}{2}\right)}$,

$w_2(t)=\sqrt{\rho_0}\,e^{i\left(\frac{\theta_0+2\pi t}{2}+\pi\right)}$.

In particolare, $w_1(\gamma(1))=w_2(\gamma(0))$ e $w_2(\gamma(1))=w_1(\gamma(0))$.

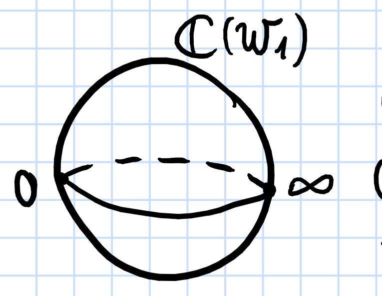
Trucco di Riemann: in ciascuna delle due copie $\mathbb{C}(w_1)$, $\mathbb{C}(w_2)$ operare un taglio lungo la semiretta $\{\Im m=0, \Re e\geq 0\}$:



. Incolliamo lungo i bordi i due fogli.

Aggiungiamo un pto all'∞: $z=w^2$, considerando il completamento proiettivo $z=z_1/z_0$, $0\leftrightarrow(1:0)$, $\infty\leftrightarrow(0:1)$. La controimmagine di ∞ è ∞.

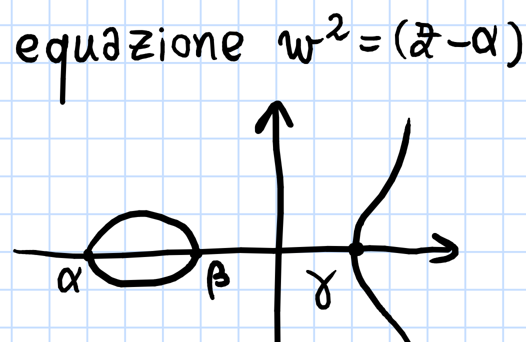
Costruzione finale:



due copie di $\mathbb{C}$ incollate (con ∞) $\Rightarrow$ otteniamo S omeo. alla sfera S^2.

L'idea è: fogli + rivestimento ramificato + azione di monodromia.

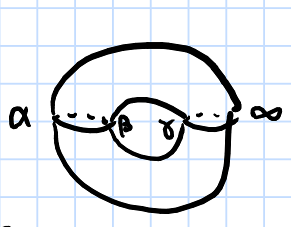
2) C curva di equazione $w^2=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$ con α,β,γ distinti.



(disegno reale)

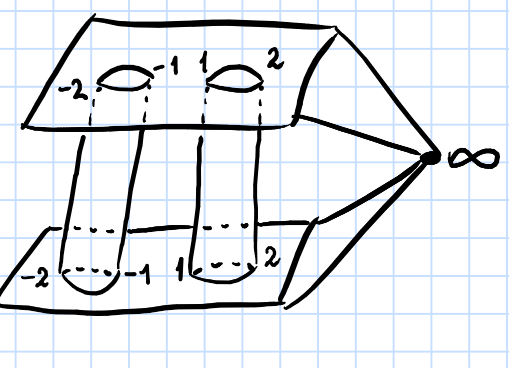
$\forall z\neq\alpha,\beta,\gamma$ ho due sol. distinte. Come in 1), consideriamo due copie di $\mathbb{C}$ e operiamo due tagli:

;

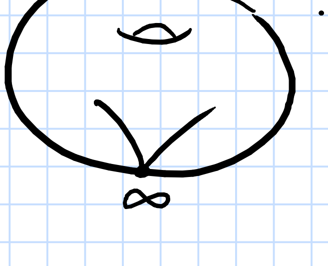


abbiamo ottenuto una superficie di genere 1, cioè un toro.

3) $w^2=(z^2-1)(z^2-4)$. Analogamente a 2),



otteniamo un toro con un pto singolare all'∞:



S superficie conn., cpt, ori.. Allora S è omeo. a: S^2 sfera $g=0$, toro $g=1$, somma connessa di tori $g\geq 2$, dove g è il genere e $g=\frac{\dim(H^1(S,\mathbb{Z}))}{2}=\frac{\dim(H_1(S,\mathbb{Z}))}{2}$.

Def.: una varietà top. X si dice superficie di Riemann se:

1) X è Hausdorff e a base numerabile;
2) $\dim_{\mathbb{R}} X=2$;
3) X ha una struttura complessa.

Def.: una CURVA ALGEBRICA è X isomorfo a $V(I)\subseteq\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, I ideale omogeneo, $\dim_{\mathbb{C}} X=1$.

Vedremo: esiste un'equivalenza di categorie tra $\{\text{sdR cpt conn.}\}\longleftrightarrow\{\text{curve algebriche lisce irr.}\}$.

Nota bene: vale solo per $\dim_{\mathbb{C}} X=1$.

Tutte le sdR sono ori..