Curve piane

$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3\setminus\{0\}/\sim$, coordinate omogenee $[z_0 : z_1 : z_2]$.

X curva algebrica piana $\overset{\text{def.}}{\iff} [F]$, F pol. omogeneo di grado d.

X irr. $\iff$ F irr., X ridotta $\iff (F) = \sqrt{(F)}$.

Se $F = \prod_j F_j^{m_j}$, ridotta $\leftrightarrow m_j = 1\ \forall j$, irr. $\leftrightarrow$ c'è solo $j=1$.

$V(F) = \{ [z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 \mid F(z_0, z_1, z_2) = 0 \}$.

Sia X ridotta e irr.. Quindi $X = V(F)$, F pol. irr..

- $P \in X$ si dice singolare $\overset{\text{def.}}{\iff} F(P) = \frac{\partial F}{\partial z_j}(P) = 0$, $j = 0,1,2$.
- $P \in X$ è liscio se $\exists\ j$ t.c. $\frac{\partial F}{\partial z_j}(P) \neq 0$.

Nota: essere pto liscio/singolare è una proprietà locale, cioè $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ dove $U_j = \{ z_j \neq 0 \}$, posto $X_j = X \cap U_j$, se $D_j(F)$ è il deomogenizzato di F rispetto a z_j, sia $P = (\xi, \eta) \in U_j$, coordinate (ξ_1, ξ_2), P è liscio $\iff$ $\iff \frac{\partial (D_j(F))}{\partial \xi_h} \neq 0$ per un qualche h.

Teo. (funzione implicita): $F(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2]$ irr., $X = V(F)$, $P \in X$. Se $\frac{\partial F}{\partial \xi_2}(P) \neq 0$ allora $\exists$ funzione olo. $g : W \to \mathbb{C}$ t.c. in un intorno $U \ni P$ si ha $U \cap X = \mathrm{graph}(g)$.

Def.: $X \subseteq \mathbb{P}^2$ curva piana si dice liscia se ogni $P \in X$ è liscio.

Cor.: $X \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ curva piana liscia $\Rightarrow$ X sdR cpt.

Dim.: $X \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è chiusa in un cpt $\Rightarrow$ cpt. Sia $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ t.c. $\pi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$. $\pi_{|U} : U \to \mathbb{C}$ dà la struttura complessa su X. $\square$
↳ da funzione implicita

Sia X irr. ridotta.

Prop.: $\#\,\mathrm{sing}(X) < +\infty$.

Dim.: $\deg(F) = d \Rightarrow \deg\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right) = d-1 \overset{X \text{ irr.} \Rightarrow F \text{ irr.}}{\Rightarrow} X \cap V\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)$ è un insieme finito per Bézout. $\square$

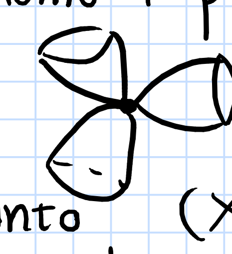
Cosa fare se X irr. è singolare?

Risoluzione delle singolarità, cioè una mappa suri. $\tilde{X} \to X$ con $\tilde{X}$ sdR.
(si veda EGA)

Molteplicità di un pto: $\mathrm{molt}_P(X) = \min_{\substack{\pi \ni P,\\ \pi \text{ retta}}} \{ \mathrm{molt}_P(\pi, X) \}$.

Def.: P pto sing. di molt. m si dice pto m-uplo ORDINARIO se localmente in P $F_m = \prod_{j=1}^{m} H_j$.
(F_m: termine di grado m del deomogenizzato; H_j: m forme lineari distinte)

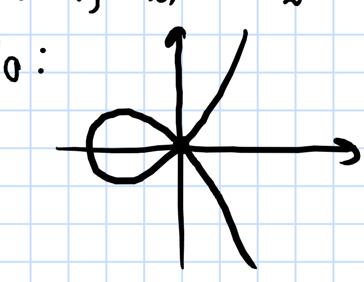
Risoluzione topologica delle singolarità

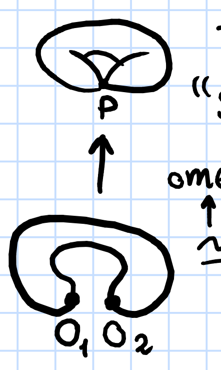
Supponiamo P pto m-uplo ordinario. Localmente $U \cap X$ lo vedo come . $U \cap (H_j = 0) \setminus \{p\} \underset{\text{omeo.}}{\simeq} \Delta^* = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ z \neq 0 \}$.

Pertanto $(X \cap U) \setminus \{P\} \underset{\text{omeo.}}{\simeq} \Delta_1^* \sqcup \ldots \sqcup \Delta_m^*$.

Aggiungendo un pto $O_j\ \forall\ \Delta_j^*$ t.c. $\{O_j\} \cup \Delta_j^* = \Delta_j$ otteniamo la struttura locale di sdR.

Es.: $D_{z_0} F(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^2(z_1 + 1)$, $F(z_0, z_1, z_2) = z_0 z_2^2 - z_1^2(z_1 + z_0)$.

In U_0: 

$X =$ 

toro con uno "strozzamento".

$\tilde{X} \overset{\text{omeo.}}{\simeq} S^2$.

Caso generale: idea: localmente $(U \cap X) \setminus \{P\} = \sqcup\, \Delta_j^*$ e $\forall j$ $\exists$ mappa $\Delta_j^* \to \Delta^*$, $z \mapsto z^{m_j}$.

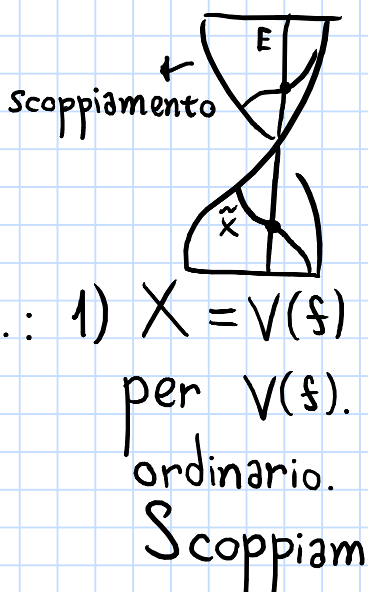
Risoluzione algebrica

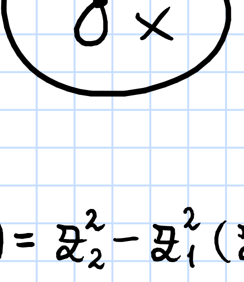
Teo.: $X \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ irr. di grado d. Allora:

(1) X liscia $\Rightarrow g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$;

(2) X sing. $\Rightarrow \exists$ sdR $\tilde{X}$ t.c. $\tilde{X} \to X$ è suri. e bigettiva su $X \setminus \mathrm{sing}(X)$ e $g(\tilde{X}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_P \delta_P$, dove $\delta_P = \frac{m_P(m_P - 1)}{2} + \sum_{Q \to P} \frac{m_Q(m_Q - 1)}{2}$.
($Q \to P$: infinitamente vicini (*))

$\tilde{X}$ si ottiene attraverso una successione di scoppiamenti.



$\xrightarrow{\pi}$ 

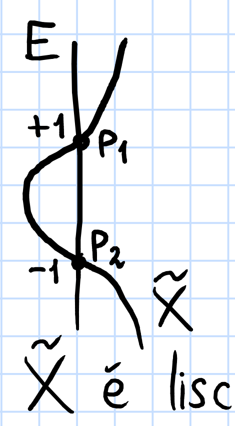
$\mathbb{C}^2$ $\pi^{-1}(X) = \tilde{X} \cup m E$.
($\tilde{X}$: trasformata stretta di X; E: curva eccezionale)

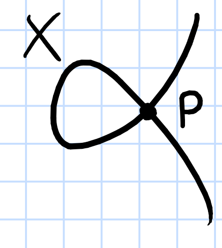
Es.: 1) $X = V(f)$, $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^2(z_1 + 1)$. $P = (0,0)$ è pto sing. per $V(f)$. $f(z_1, z_2) = \underbrace{z_2^2 - z_1^2}_{f_2} - \underbrace{z_1^3}_{f_3} \Rightarrow P$ è pto doppio ordinario.

Scoppiamento di X: poniamo $u = \frac{y_2}{y_1}$ = pendenza retta per $P = (0,0)$. L'equazione di $Bl_P(\mathbb{C}^2)$: $z_1 y_2 = z_2 y_1$ diventa $z_2 = u z_1$.
(Bl_P ↳ blow-up)

$Bl_P(X) : \begin{cases} z_2^2 = z_1^2(z_1 + 1) \\ z_2 = u z_1 \end{cases} \Rightarrow u^2 z_1^2 = z_1^2(z_1^2 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1^2(u^2 - (z_1 + 1)) = 0$. Conclusione: $z_1^2 = 0 \leftrightarrow 2E$, $u^2 - (z_1 + 1) = 0 \leftrightarrow \tilde{X}$. Nota $E \cap \tilde{X} \leftrightarrow z_1 = 0$, $u = \pm 1$.



$\xrightarrow{\pi}$ 

$\tilde{X}$ è liscia e $\pi^{-1}(P) = \{P_1\} \cup \{P_2\}$.

(*) (infinitamente vicini): $\pi : Bl_P(\mathbb{C}^2) \to \mathbb{C}^2$, $\pi^{-1}(P) = E$. $Q \in E$ si dice infinitamente vicino a P.