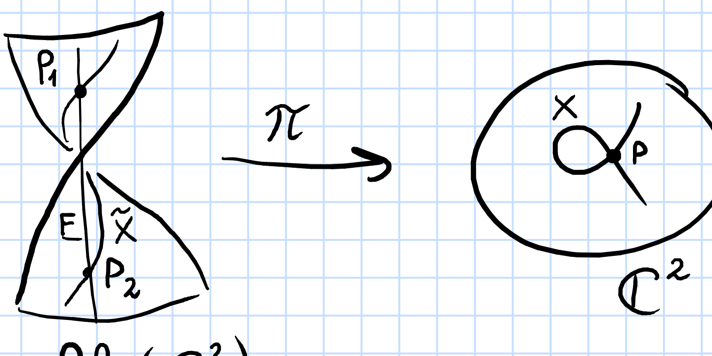


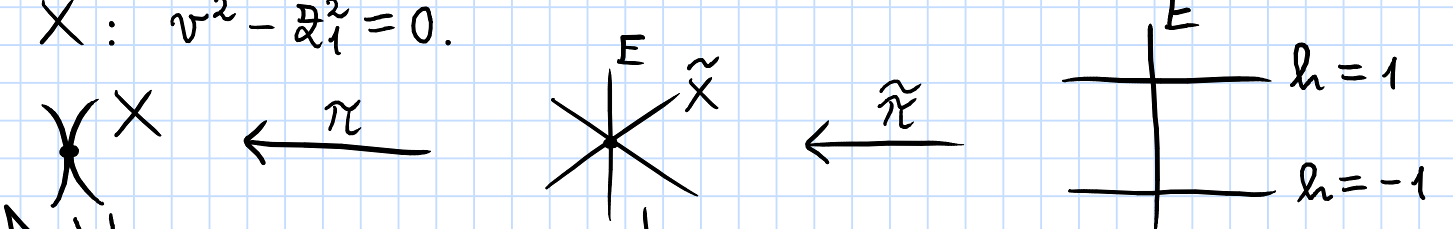
$P=(0,0)$

$Bl_P(\mathbb C^2)$

$\curvearrowright v = y_2/y_1$

Se $molt_P(X)=m$, $\tilde X: F(z_1, z_1\cdot v)\, z_1^{-m}=0$.

Es.: $X:\ z_2^2 - z_1^4 = 0$ (tacnodo).
$\tilde X:\ v^2 - z_1^2 = 0$.



Dobbiamo fare un secondo scoppiamento:
$z_1 = vh \Rightarrow \tilde{\tilde X}: 1-h^2=0$.
$P_1=(0,0)$ in $\tilde X$ con coord. (z_1,v) è pto sing. infinitamente vicino a P.

Ex.: $X\subseteq \mathbb P^2(\mathbb C)$, $X=\{z_0^2 z_2^2 = (z_1^2-z_0^2)(z_1^2-4z_0^2)\}$.
Determinare $\tilde X$ sdR associata a X.
Oss.: in U_0 $X\cap U_0 = \{z_2^2 = (z_1^2-1)(z_2^2-4)\}$.

Sol.: cerchiamo i pti singolari $\rightsquigarrow$ c'è solo $[0:0:1]$.
Conclusione: X ha un unico pto singolare $P=[0:0:1]\in L_0 = \{z_0=0\}$ retta all'∞. In coordinate affini (z_0,z_1):
$f(z_0,z_1) = z_0^2 - (z_1^2-z_0^2)(z_1^2-4z_0^2) \Rightarrow molt_P(X)=2$ e come nell'esempio del tacnodo $\exists$ P_1 sing. con molt. 2 pto ∞mente vicino. Conclusione: $\tilde{\tilde X} \xrightarrow{Bl_{P_1}} \tilde X \xrightarrow{Bl_P} X$ con $\tilde{\tilde X}$ liscia di genere $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \delta_P = \frac{3\cdot 2}{2} - \frac{2}{2} - \frac{2}{2} = 1$.

P pto doppio
P_1 pto doppio ∞mente vicino

SFERA DI RIEMANN $\longrightarrow$ modulo un coniugio per la struttura complessa

S^2 con le proiezioni stereografiche: $N=(0,0,1)$, $S=(0,0,-1)$,
$U_0 = S^2\setminus\{N\}$, $U_1 = S^2\setminus\{S\}$, $\varphi_0: U_0\to\mathbb C$, $(x_1,x_2,x_3)\mapsto \frac{x_1}{1-x_3} + \frac{i x_2}{1-x_3}$,

$\varphi_1: U_1\longrightarrow\mathbb C$, $(x_1,x_2,x_3)\mapsto \frac{x_1}{1+x_3} - i\frac{x_2}{1+x_3}$.

Oss.: $\varphi_{0,1} = (\varphi_1\circ\varphi_0^{-1})(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$,
ovvero, se $z=x+iy$, $\varphi_{0,1}(z) = \frac{1}{z}$.

Conclusione: S^2 con struttura olo. $\cong \mathbb P^1(\mathbb C)$.

Notazione: $\mathbb P^1(\mathbb C)$, $\mathbb P^1_{\mathbb C}$, $\mathbb C_\infty$.

TORO COMPLESSO

Consideriamo $\Lambda\subseteq\mathbb C$, $\Lambda = \mathbb Z\omega_1 + \mathbb Z\omega_2$ con ω_1,ω_2 $\mathbb R$-lin. indi. e WLOG $\Im(\omega_1/\omega_2)>0$. $\mathbb T := \mathbb C/\Lambda$.
Topologicamente $\mathbb T \cong_{omeo.} S^1\times S^1$. La struttura complessa è ereditata da $\mathbb C$.

FUNZIONI E MAPPE

Def.: $f: X\to\mathbb C$ si dice OLOMORFA in $p\in X$ se $\exists$ $\varphi: \overset{\substack{X\\ \cup}}{U(p)} \to \overset{\substack{\mathbb C\\ \cup}}{\Delta(q)}$ carta locale t.c. $f\circ\varphi^{-1}$ è olo. in q.
f OLOMORFA in $U\subseteq X \overset{def.}{\iff}$ f olomorfa $\forall p\in U$
(nota: c'è sotto la compatibilità delle carte).

Notazione: $\mathcal O_X(U) = \{f: U\to\mathbb C \text{ olo.}\}$.

Oss.: le funzioni olo. sono armoniche $\Rightarrow$ soddisfano il principio del massimo.

Teo. (del massimo): X sdR, $U\subseteq X$ aperto conn., $f: U\to\mathbb C$ olo.. Se $\exists$ $p\in U$ t.c. $|f(x)|\leq|f(p)|$ $\forall x\in U$, allora f è cost. in U.

Cor.: X sdR cpt e conn., $f: X\to\mathbb C$ olo. $\Rightarrow$ f cost..

Def.: $f: X\to\mathbb C$ si dice MEROMORFA in p se $\exists$ $\varphi: U(p)\to\Delta(q)$ carta locale t.c. $f\circ\varphi^{-1}$ è singolarità eliminabile o di tipo polo in q.

Notazione: $\mathcal M_X(U) = \{f: U\to\mathbb C \text{ mero.}\}$.

Def.: l'ORDINE di una f mero. è, localmente, $f\circ\varphi^{-1}: \Delta\to\mathbb C$, $p\mapsto 0$,
$(f\circ\varphi^{-1})(z) = \sum_{n\geq k} c_n(z-p)^n$, $ord_p(f) = \min\{n \mid c_n\neq 0\} = k$.

Es.: $f:\mathbb C\to\mathbb C$, $z\mapsto z^2$ all'∞ ha un polo di ordine 2.

Teo.: $f:\mathbb P^1\to\mathbb C$ mero. $\Rightarrow f(z_0,z_1) = \frac{p(z_0,z_1)}{q(z_0,z_1)}$ con p,q pol. omogenei dello stesso grado.

Dim.: consideriamo $U_0 = \{z_0\neq 0\} = \mathbb P^1\setminus\{\infty\}$ con coord. $z = \frac{z_1}{z_0}$.
Consideriamo gli zeri e i poli di f in U_0, l'insieme $\{\lambda_j\}\subseteq\mathbb C$, $e_j = ord_{\lambda_j}(f)$. Sia $\tilde R(z) := \prod_j (z-\lambda_j)^{e_j}$ e completiamo $\tilde R$ a $R:\mathbb P^1\to\mathbb C$, $R(z_0,z_1) := z_0^m\cdot\prod_j (b_j z_1 - a_j z_0)^{e_j}$ dove $b_j z_1 - a_j z_0 \leftrightarrow z-\lambda_j$, $m = -\sum_j e_j$.
Conclusione: f/R è mero. e $f/R|_{U_0}$ non ha poli né zeri.
In ∞: se f/R non ha poli., f/R non ha poli su $\mathbb P^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ è cost.; altrimenti ha un polo. in $\infty \Rightarrow R/f$ non ha poli in $\mathbb P^1 \Rightarrow$ è cost.. $\square$

Oss.: $f: X\to\mathbb C$ mero. $\longleftrightarrow$ $f: X\to\mathbb P^1$ olo. (tra sdR).