MAPPE TRA SDR

X, Y sdR.

Def.: $F: X \to Y$ si dice OLOMORFA se $\forall p \in X \; \exists \, \phi_1 : \underset{\text{UI}}{U_1(p)} \to \underset{\text{UI}}{\Delta_1}$, ($X \supseteq U_1(p)$, $\mathbb{C} \supseteq \Delta_1$)

$\phi_2 : U_2(q) \to \Delta_2$, $U_1(p) \xrightarrow{F} U_2(q) \subseteq Y$ t.c. $g = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$, con $q = F(p)$, $\Delta_2 \subseteq \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} U_1(p) & \xrightarrow{F} & U_2(q) \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 \\ \Delta_1 & \xrightarrow{g} & \Delta_2 \end{array}$$

$g : \Delta_1 \to \Delta_2$ è olo..

Proprietà:

1) $\mathrm{Id} : X \to X$ è olo.;
2) $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ olo. $\Rightarrow G \circ F : X \to Z$ olo.;
3) $F: X \to Y$, $G: W \to \mathbb{C}$ mero. $\Rightarrow G \circ F : F^{-1}(W) \to \mathbb{C}$ mero.; ($W \subseteq Y$)
4) $F: X \to Y$, $G: W \to \mathbb{C}$ olo. $\Rightarrow G \circ F : F^{-1}(W) \to \mathbb{C}$ olo.. ($W \subseteq Y$)

In particolare: $F: X \to Y$ olo. induce un omomorfismo

$F^* : \mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_X(F^{-1}(W))$; inoltre $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
$g \mapsto g \circ F$

Cor.: $\{$sdR + mappe olo.$\}$ è una categoria.

Def.: un BIOLOMORFISMO è $F: X \to Y$ biettiva, olo., t.c. F^{-1} olo..

Proprietà utile: $F: X \to Y$ olo. $\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y$ e $h : U \to \mathbb{C}$ olo.
$h \circ F : F^{-1}(V) \to \mathbb{C}$ olo..

FORMA LOCALE NORMALE

Teo.: X, Y sdR, $F: X \to Y$, $p \mapsto q$ olo.. Allora $\exists$ carte locali

$\varphi_1 : U_1(p) \to \Delta(0, \varepsilon)$, $\varphi_2 : U_2(q) \to \Delta(0, \varepsilon')$ t.c. $(\varphi_2 \circ F)(x) = (\varphi_1(x))^n$.

$$\begin{array}{ccc} U_1(p) & \xrightarrow{F} & U_2(q) \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \Delta(0,\varepsilon) & \xrightarrow{g} & \Delta(0,\varepsilon') \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

Dim.: tramite traslazioni in $\mathbb{C}$ WLOG $\varphi_1(p) = 0$, $\varphi_2(q) = 0$.

$g = \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \Delta(0, \varepsilon) \to \Delta(0, \varepsilon')$, $g(z) = \sum_{j \geq 1} g_j z^j =$

$= g_n z^n + o(z^n)$, $g_n \neq 0$ (WLOG).

Sia $J(z)$ una funzione olo. t.c. $(J(z))^n = g(z)$,
$J(z) = g_n^{1/n} z + o(z)$. J è iso. locale. Eventualmente restringendo U_1 U_2 (quindi prendendo $\varepsilon, \varepsilon'$ più piccoli),
$J \circ \varphi_1 := \psi_1 : \tilde{U}_1 \to \Delta(0, \varepsilon)$, allora
$\varphi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1} : \Delta(0, \varepsilon) \to \Delta(0, \varepsilon')$. □
$z \longmapsto z^n$

Def.: F loc. in p è $z \mapsto z^n$, $n := \mathrm{molt}_p F$.

Oss.: $F: X \to Y$, loc. $F \leftrightarrow g(z)$ olo. $\Rightarrow \mathrm{molt}_p F = 1 + \mathrm{ord}_0 \left(\frac{dg}{dz} \right) \Rightarrow$ ($g(0)=0$)
$\Rightarrow$ è ben def..
↳ per chain rule con una carta

Prop.: $F: X \to Y$ olo. non cost. $\Rightarrow F$ è aperta.

Dim.: lo è localmente $(z \mapsto z^n)$. □

Teo.: X, Y sdR, Y conn., $F: X \to Y$ olo. non cost..
X cpt $\Rightarrow$ Y cpt e F suri..

Dim.: $F(X)$ è cpt in T2 $\Rightarrow$ chiuso, ma anche aperto $\overset{Y \text{ conn.}}{\Rightarrow} F(X) = Y$. □

Teo.: X sdR cpt. $\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ mero.} \} \leftrightarrow \{ F : X \to \mathbb{P}^1 \text{ olo. non} \equiv \infty \}$
(identifichiamo $\mathbb{C} \cong U_0 = \{ [z_0 : z_1] \in \mathbb{P}_1 \mid z_0 \neq 0 \}$ e $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_\infty$).

Idea: $p \in X$ polo. per $f : X \to \mathbb{C} \longleftrightarrow F(p) = \infty$.

Dim.: sia $f : X \to \mathbb{C}$ mero.. $\forall x \notin \{$poli di $f\}$ poniamo
$F(x) = [1 : f(x)]$; $\forall x \in \{$poli di $f\}$ poniamo $F(x) = [0:1] = \infty$.
Quindi f olo. in $X \setminus \{\text{poli}\} \Rightarrow F : X \setminus \{\text{poli}\} \to U_0$ olo..
Se p è polo di f, localmente $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^n}$, $\varphi(0) \neq 0$, $n > 0$.
Usiamo la caratterizzazione delle F olo..
Consideriamo $U_1 = \{ z_1 \neq 0 \}$ intorno di ∞.
$F : X \to \mathbb{P}^1$, $p \mapsto \infty$ è olo. $\Leftrightarrow \forall h : U_1 \to \mathbb{C}$ olo., $h \circ F$ è olo..
Ma $h : U_1 \to \mathbb{C}$ è olo. $\Leftrightarrow \begin{cases} h(1/z) & z \neq 0 \\ h(\infty) & z = 0 \end{cases}$ è olo. in 0.
$h \circ F \rightsquigarrow h\left(\frac{z^n}{\phi(z)} \right)$ è olo. in $z \in U(0)$.
Viceversa, data $F : X \to \mathbb{P}^1$ olo. sia $U = F^{-1}(U_0) =$
$= F^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})$. Poniamo $f = F_{|U} : U \to \mathbb{C} \cong U_0$.
In $F^{-1}(\infty)$: localmente in p $F(x) = [F_0(x) : F_1(x)]$ con
$F_0(p) = 0$. Posso scrivere $f = [1 : \frac{F_1}{F_0}] = \frac{F_1}{F_0}$ mero.. □

⚠ Serve:

Lemma: X, Y sdR, $F: X \to Y$ olo. non cost. $\Rightarrow$
$\Rightarrow F^{-1}(q)$ non ha pti di accumulazione e
$\{ p \mid \mathrm{molt}_p(F) > 1 \}$ " " " " " .

Dim.: no. □

In particolare: X cpt $\Rightarrow$ sono finiti.

$F: X \to Y$ olo..

Def.:
1) $p \in X$ si dice pto di RAMIFICAZIONE se $\mathrm{molt}_p(F) \geq 2$;
2) $q \in Y$ " " " " DIRAMAZIONE se $q = F(p)$ con p pto di ramificazione.

Teo. (grado di una mappa): X, Y sdR conn. cpt, $F: X \to Y$ olo. non cost. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall y \in Y$ $d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \mathrm{molt}_p(F)$ è cost..

Dim.: è sufficiente vedere che $\deg : Y \to \mathbb{Z}$, $y \mapsto d_y(F)$ è loc. cost..
Sia $y \in Y$ e $F^{-1}(y) = \{ x_1, \dots, x_n \}$, $\mathrm{molt}_{x_j}(F) = m_j$.
Localmente $\exists$ intorni $U_j \ni x_j$ t.c. $U_j \cap U_{j'} = \emptyset \; \forall j \neq j'$,
$F_{|U_j} : z \mapsto z^{m_j}$. È sufficiente verificare che $\exists$ intorno
$U \ni y$ t.c. $\forall y' \in U$ $F^{-1}(y') \subseteq \bigsqcup U_j$.
PA $\exists \{ p_h \}_h$ t.c. $p_h \notin \bigsqcup U_j$ ma $F(p_h) \to y$.
X cpt. $\Rightarrow \exists$ $p_{h_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{x} \Rightarrow F(\bar{x}) = y \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{x} = x_j$, assurdo. □