Parentesi: caratteristica di Eulero-Poincaré (topologica).

X s.t. "buono" (es.: varietà algebrica).

$b_j = \mathrm{rk}(H_j(X;\mathbb{Z}))$ j-esimo # di Betti.

Def.: la caratteristica di Eulero-Poincaré di X è
$$\chi(X) = \sum_j (-1)^j b_j.$$

Per noi: X sdR cpt conn. $\Rightarrow b_0 = 1,\ b_2 = 1,\ b_j = 0\ \forall j \geq 3$,
$b_1 = 2g$, g genere di X.

Cioè: $\chi(X) = 2 - 2g$.

Caratterizzazione di Eulero mediante TRIANGOLAZIONE

Def.: X sdR cpt conn.. Una triangolazione $\mathcal{T}$ di X è una collezione di omeomorfismi $t_j : T_j \to \mathcal{T}_j \subseteq X$,
$T_j = \Delta$ triangolo t.c. $\{\mathcal{T}_j\}$ è un ricoprimento di X e
$\forall j \neq j'$ $\mathcal{T}_j \cap \mathcal{T}_{j'} = \varnothing, \{v\}$ vertice o $\{\ell_{jj'}\}$ lato.

Teo. (Eulero): $\chi(X) = \#v - \#\ell + \#f$, dove v = vertici, $\ell = \{\text{lati}\}$ e $f = \{\text{facce}\} = \{\text{triangoli}\}$.

Teo. (formula di Hurwitz): X, Y sdR cpt e conn. di generi $g(X), g(Y)$, $F : X \to Y$ olo. non cost.. Allora
$$2g(X) - 2 = \deg F \cdot (2g(Y) - 2) + \underbrace{\sum_{p \in X} (\mathrm{molt}_p F - 1)}_{\overset{\shortparallel}{R},\ \text{ramificazione totale di } F}.$$
F si dice rivestimento ramificato.

Dim. (di Hurwitz): consideriamo una triangolazione $\mathcal{T}$ di Y t.c.:

(i) $\{\text{pti di diramazione di } F\} \subseteq \{\text{vertici di } \mathcal{T}\}$;

(ii) $\forall y$ pto di diramazione, posti $F^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ e $U_j \ni x_j$, $V \ni y$ intorni t.c. $F_{|U_j} : z \mapsto z^{m_j}$, vogliamo che $\forall$ triangolo T t.c. y è vertice di T si ha $T \subseteq V$ e $F^{-1}(T) = \bigsqcup_j T_j$ con $T_j = \bigcup_h T_{jh} \subseteq U_j$, $h = 1, \dots, m_j$.
↳ chiedo che si intersechino, a due a due, solo in x_j

Con un eventuale raffinamento, $\{T_{jh}\}$ è una triangolazione in U_j. Cioè: $F^{-1}(\mathcal{T})$ è una triangolazione di X.

Poniamo $v' = \#$vertici, $\ell' = \#$lati, $f' = \#$ facce, $d = \deg F$.
Fuori dai pti di ramificazione F è un rivestimento di grado $d \Rightarrow \ell' = d\ell$, $f' = df$.
$v' = dv - \left(\sum_{p \in X} (\mathrm{molt}_p F - 1)\right)$. □

Oss.: Hurwitz $\Rightarrow g(X) = \deg F \cdot (g(Y) - 1) + 1 + \frac{1}{2} R$.

Conseguenza: R è sempre pari.

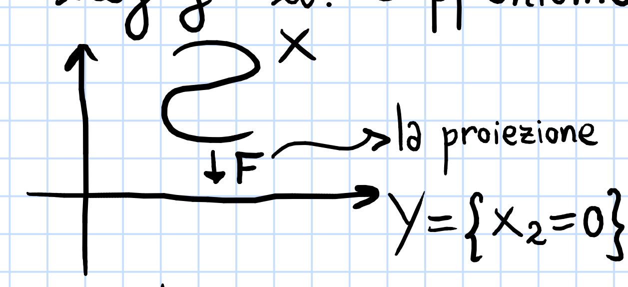
Prop.: $F : X \to Y$ come sopra. $\deg F = 1 \Rightarrow F$ biolo..
$\deg F \geq 2 \Rightarrow g(X) \geq g(Y)$.

Dim.: $\deg F = 1 \Rightarrow$ loc. $F \leftrightarrow (z \mapsto z)$, cioè F è bigettiva e localmente $F^{-1} \leftrightarrow (z \mapsto z) \Rightarrow F^{-1}$ olo..

L'altra freccia è facile. □

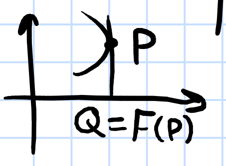
Applicazione: genere di una curva piana.

$X \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ curva algebrica irr. liscia, $X = \{g(x_0, x_1, x_2) = 0\}$, $\deg g = d$. Supponiamo: i) $P_0 = [0:0:1]$ pto all'∞;
ii) la retta all'∞ $\{x_0 = 0\}$ non sia tangente a X.



$Y = \{x_2 = 0\}$ Poniamo $F : X \to Y = \{x_2 = 0\}$.
$[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : x_1]$

In coordinate affini: $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, $F_{|U_0} : X \cap U_0 \to Y \cap U_0$,
$(x, y) \mapsto x$
$x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$. I pti di ramificazione di F corrispondono ai pti di X che hanno retta tangente verticale,



cioè
$$\begin{cases} g = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \end{cases}.$$
Per Bézout abbiamo $R = d(d-1)$.

$Y = \{x_2 = 0\} \cong \mathbb{P}^1 \Rightarrow g(Y) = 0$. Per Hurwitz,
$$2g(X) - 2 = \deg(F) \cdot (2g(Y) - 2) + R =$$
$$= -2d + d(d-1) = d(d-3) \Rightarrow g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Automorfismi

Def.: un AUTOMORFISMO di X è $F : X \to X$ biholo..

Caso 1: $g = 0$. X sdR cpt di genere $0 \Rightarrow X \cong \mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Sia $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ un automorfismo $\Rightarrow \deg f = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z_0, z_1) = (a z_1 + b z_0, c z_1 + d z_0)$. f ben def. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ i due pol. non devono avere zeri in comune $\Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{b}{a} \neq -\frac{d}{c} \Rightarrow ad - bc \neq 0$.

In coordinate affini: $U_0 = \{z_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}$, $[z_0 : z_1] \mapsto z = \frac{z_1}{z_0}$,
$$f_{|U_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$
$$z \mapsto \frac{cz + d}{az + b}$$

Oss.: $PGL(2;\mathbb{C}) := GL(2;\mathbb{C})/\mathbb{C}^* \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$.
↓
trasformazioni proiettive (proiettività) di $\mathbb{P}^1$