BIOLOMORFISMI tra SdR di genere 1

X SdR cpt conn. di genere 1 $\Longleftrightarrow X \cong \mathbb{C}/\Lambda$,
$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z},\ \omega_1, \omega_2\ \mathbb{R}\text{-lin. indi.}\}$

Teo.: $X = \mathbb{C}/\Lambda$, $Y = \mathbb{C}/\Gamma$, (i) $f: X \to Y$ olo. è indotta da $G: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \gamma z + a$, $\gamma, a \in \mathbb{C}$ fissati e $\gamma(\Lambda) \subseteq \Gamma$;
(ii) se $0 \mapsto 0$, allora $a = 0$ e G è omo. di gruppi;
(iii) f isomorfismo $\Longleftrightarrow \gamma(\Lambda) = \Gamma$.

Nota: X e Y hanno una struttura di gruppo additivo e hanno la topologia quoziente (e struttura olo.).

Dim.:
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_2"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$
per la formula di Hurwitz, f è un rivestimento non ramificato $\Rightarrow$ $\Rightarrow f$ induce G sui riv. univ. di X e Y,
cioè $G: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olo.. Componendo con una traslazione, WLOG $f(0) = 0$, cioè $G(0) = 0$. G induce $f: X \to Y \Rightarrow$
$\Rightarrow G(\Lambda) \subseteq \Gamma$. G induce $f \Rightarrow G(z + \ell) \equiv_{\mathrm{mod}(\Gamma)} G(z)$ $\forall \ell \in \Lambda$, cioè $\omega(z, \ell) := G(z + \ell) - G(z) \in \Gamma$.
Fissato ℓ, $\omega(z, \ell)$ è loc. cost. in $z \Rightarrow$
$\Rightarrow G'(z + \ell) = G'(z)\ \forall \ell \in \Lambda \Rightarrow G'$ è Λ-invariante $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ è determinato da $G'|_P$, P parallelogramma fondamentale $\underset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow} G'$ è cost. $= \gamma$, cioè $G(z) = \gamma z$, $\gamma \in \mathbb{C}$.
(ii) e (iii) seguono poiché $\deg f = |\Gamma / \gamma(\Lambda)|$. □

AUTOMORFISMI di X con $g(X) = 1$

Teo.: $X = \mathbb{C}/\Lambda$, $f: X \to X$ auto. t.c. $f(0) = 0$. Allora:
(i) $\gamma = \pm 1$; oppure,
(ii) Λ = reticolo quadrato, $\gamma = \pm i$; oppure,
(iii) Λ = " esagonale, $\gamma = \sqrt[6]{1}$.

Dim.: (i) ok. Sia $\ell \in \Lambda$ di modulo minimo e f isomorfismo $\Rightarrow$
$\Rightarrow G(\ell) = \gamma \cdot \ell$ ha modulo minimo $\Rightarrow |\gamma| = 1$.
Inoltre, $\langle \ell, \gamma \cdot \ell \rangle = \Lambda$. $\gamma(\gamma \ell) \in \Lambda$, cioè $\gamma^2 \ell = m\gamma\ell + n\ell$, $m, n \in \mathbb{Z}$, ovvero γ è radice di $p(z) = z^2 - mz - n$. $|\gamma| = 1 \Rightarrow n = -1$. Se $m = 0$, $\gamma = \pm i$ e $\Lambda = \langle \ell, i\ell \rangle$ è reticolo quadrato.
Se $m \neq 0$, $m = 2\,\mathrm{Re}\,\gamma \Rightarrow m = \pm 1$, $\gamma = e^{i\frac{\pi}{3}k}$ e Λ è il reticolo esagonale. □

Cor.: X SdR cpt conn. di genere $1 \Rightarrow X = \mathbb{C}/\Lambda$ con $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$ con $\tau = \xi + i\eta$, $\eta > 0$ ($\tau \in \mathbb{H}$).

Dim.: Sia $\Lambda_0 = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$. Poniamo $\gamma = \omega_1^{-1}$ e costruiamo $G: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \gamma z$ e se $\mathrm{Im}\,\frac{\omega_2}{\omega_1} < 0$ moltiplico per -1 (oppure WLOG $\mathrm{Im}\,\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$). □

Cor.: siano $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$, $\Lambda' = \langle 1, \tau' \rangle$. Allora $X = \mathbb{C}/\Lambda \cong \mathbb{C}/\Lambda' = X' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ t.c. $\tau = \frac{a + b\tau'}{c + d\tau'}$.

Dim.: $X \cong X' \Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{C}$ t.c. $\gamma\Lambda = \Lambda' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle \gamma, \gamma\tau \rangle = \Lambda' \Leftrightarrow \exists\, c, d \in \mathbb{Z}$ t.c. $\gamma = c + d\tau'$,
$\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $\gamma\tau = a + b\tau'$ e $ad - bc = 1$
(± 1 perché generano, $+1$ perché $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$). □

Per studiare il caso $g(X) \geq 2$ consideriamo:

AZIONE DI GRUPPO & SUPERFICIE QUOZIENTE.

X SdR e $(G, *)$ gruppo finito e l'azione di G su X è $\rho: G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g(x)$. Azione: $id(x) = x$, $(g * h)(x) = g(h(x))$.

Richiediamo inoltre che l'azione sia:
1) effettiva: $\ker \rho = \{g \in G \mid g(x) = x\ \forall x \in X\} = \{id\}$;
2) olomorfa: $\forall g \in G$ $\rho_g: X \to X$, $x \mapsto g(x)$ è olo..

Sia $p \in X$. Poniamo $G_p :=$ stabilizzatore di $p = \{g \in G \mid g(p) = p\}$.

Fatti: 0) G_p è ciclico;
1) $\{p \in X \mid \mathrm{stab}_p(G) \neq \{id\}\}$ è discreto;
2) $\exists\, U = U(p)$ t.c.:
(i) $g(u) \in U\ \forall u \in U\ \forall g \in G_p$;
(ii) $U \cap g(U) = \varnothing\ \forall g \notin G_p$;
(iii) p è l'unico pto fisso per $\mathrm{stab}_p(G)$ in U;
(iv) $\exists$ omeo. locale t.c. $U/G_p \cong X/G$ in p.

I fatti 0), 1) e 2) implicano:

Teo.: azione di G su X olo. e eff. induce $\pi: X \to X/G$ t.c.:
- X/G eredita una struttura di SdR;
- π è olo. e $\deg \pi = |G|$;
- $\mathrm{molt}_p \pi = |\mathrm{stab}_p(G)|$.

Dim.: no. □

Lemma: $\pi: X \to Y = X/G$. $\forall y \in Y$ pto di diramazione $\forall x_j \in \underbrace{\pi^{-1}(y)}_{\{x_1, \dots, x_s\}}$ $\mathrm{molt}_{x_j} \pi = \frac{|G|}{s}$.

Dim.: $\pi: X \to X/G$, $\pi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_s\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{stab}_{x_j}(G)$ e $\mathrm{stab}_{x_{j'}}(G)$ sono coniugati $\Rightarrow$
$\Rightarrow |\mathrm{stab}_{x_j}(G)| = |\mathrm{stab}_{x_{j'}}(G)|$ e
$s \cdot |\mathrm{stab}_{x_j}(G)| = \deg \pi = |G|$. □

Cor.: $\pi: X \to Y = X/G$, $\{y_1, \dots, y_k\} \subseteq Y$ luogo di diramazione, $\{x_{h,j}\}$ insieme di ramificazione sopra y_j, $r_j = \mathrm{molt}_{x_{h,j}} \pi$.
Allora: $2g(X) - 2 = |G| \cdot \left(2g(Y) - 2 + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{r_j}\right)\right)$.

Dim.: Hurwitz $\Rightarrow 2g(X) - 2 = \deg \pi\,(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\mathrm{molt}_p \pi - 1)$.
$\deg \pi = |G|$, $\mathrm{molt}_p \pi = |\mathrm{stab}_p(G)|$.
$\forall y_j$ pto di diramazione $\#\{x_{h,j} \mid \pi(x_{h,j}) = y_j\} = \frac{|G|}{|\mathrm{stab}_{x_j} G|} = \frac{|G|}{r_j}$. I conti tornano. □