X sdR cpt conn., G gruppo finito che agisce su X in modo olo. e effettivo. $Y = X/G$ ha struttura di sdR e $\pi : X \to Y$ ha grado $|G|$ e $\forall y_j \in Y$ pto di diramazione, $\pi^{-1}(y_j) = \{x_{j,1}, \dots, x_{j,s}\}$ $\forall h = 1, \dots, s$ $\mathrm{molt}_{x_{j,h}} \pi = |\mathrm{stab}_{x_{j,h}} G| = |G|/s =: \pi_j$. Ricordiamo che Hurwitz diventa $2g(X) - 2 = |G|\left(2g(Y) - 2 + \sum_{j=1}^{k}(1 - 1/\pi_j)\right)$, $\{y_1, \dots, y_k\}$ pti di diramazione.

Teo. (di Hurwitz sugli automorfismi): X, G come sopra, $g(X) = g \geq 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow |G| \leq 84(g-1)$.

Dim.: $Y = X/G$, Hurwitz $\Rightarrow 2g(X) - 2 = |G|\Big(2g(Y) - 2 + \underbrace{\sum_{j=1}^{k}(1 - 1/\pi_j)}_{= \bar{R}}\Big)$.

Nota: $g(X) \geq 2$, $g(Y) \geq 0$, $\bar{R} \geq 0$. Se $\bar{R} = 0$, allora π non ha ramificazione, quindi $g(Y) \geq 2$, pertanto $|G| \leq g(X) - 1$.

Se $\bar{R} \neq 0$, $\bar{R} \geq \frac{1}{2}$. Se $g(Y) \geq 1$, $|G| \leq 2(2g(X) - 2)$.

Rimane il caso $g(Y) = 0$, $\bar{R} > 0$: $2g(X) - 2 = |G|(-2 + \bar{R})$.

Il teorema segue dal lemma $\bar{R} \geq 2 + \frac{1}{42}$. $\square$

Lemma: $\bar{R} = \sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{\pi_j}\right)$. 1) $\bar{R} < 2 \iff \begin{cases} k = 1, 2 \\ k = 3, \{\pi_j\} = \{2, 2, *\}, \{2, 3, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\} \end{cases}$;

2) $\bar{R} = 2 \iff \begin{cases} k = 3, \{\pi_j\} = \{2,3,6\}, \{2,4,4\}, \{3,3,3\} \\ k = 4, \{\pi_j\} = \{2, 2, 2, 2\} \end{cases}$;

3) $\bar{R} > 2 \iff \bar{R} \geq 2 + \frac{1}{42}$, ottenuto con $\{\pi_j\} = \{2, 3, 7\}$.

Dim.: a mano. $\square$

Il lemma implica il teo. perché nel nostro caso $g(X) \geq 2$, $g(Y) = 0 \Rightarrow \bar{R} > 2$.

Teo. (generale [difficile]): X sdR cpt conn. di genere $\geq 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \#\mathrm{Aut}(X) < +\infty$. Dim.: no. $\square$

Cor.: $\#\mathrm{Aut}(X) \leq 84(g(X) - 1)$.

Forme differenziali

In $\mathbb{C}$ consideriamo le coord. $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Lo spazio tangente è $\mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Fatto: $f : \underset{\mathbb{C}}{U} \to \mathbb{C}$ olo. $\iff \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f) \equiv 0$. ($U \subseteq \mathbb{C}$)

$X = \mathbb{C}$, $T_{X,\mathbb{R}} :=$ spazio tangente reale $= \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\}$.

$\Omega^1_{X,\mathbb{R}} = T^*_{X,\mathbb{R}} = \mathrm{span}\{dz, d\bar{z}\}$, $dz = dx + i\,dy$, $d\bar{z} = dx - i\,dy$.

Def.: una 1-forma differenziale (di classe C^∞) è
$$\omega = \underset{(1,0)}{f(z, \bar{z})\,dz} + \underset{(0,1)}{g(z, \bar{z})\,d\bar{z}}, \text{ con } f, g \text{ di classe } C^\infty.$$

(Teoria di Hodge) Decomposizione di ω in forma $(1,0)$ + forma $(0,1)$.

Def.: una 2-forma differenziale (di classe C^∞) è $\eta = h(z, \bar{z})\,dz \wedge d\bar{z}$, con h di classe C^∞.

Forme differenziali su sdR

Def.: una 1-forma diff. ω su X è un ricoprimento $\{(U_j, \phi_j)\}$, $\phi_j : U_j \to V_j$ ($U_j \subseteq X$, $V_j \subseteq \mathbb{C}$) e $\forall U_j$, z_j coord. locale $\phi_j(\omega) = f_j\,dz_j + g_j\,d\bar{z}_j$ t.c. posto $T = \phi_j \circ \phi_{j'}^{-1} : \phi_{j'}(U_j \cap U_{j'}) \to \phi_j(U_j \cap U_{j'})$, $z_2 \mapsto z_1$, si ha $f_{j'} = f_j \cdot T'$, $g_{j'} = g_j \cdot \bar{T}'$, dove $T' = \frac{dT}{dz_2}$.

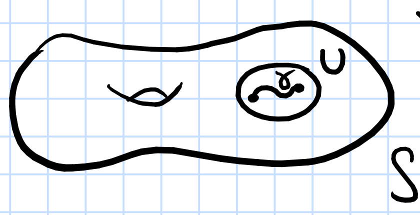
Forme differenziali olomorfe $\longleftrightarrow \omega = f(z)\,dz$, f olo..

Differenziare una 1-forma: ω 1-forma $\mapsto d\omega$ 2-forma, $\omega = f\,dz + g\,d\bar{z} \mapsto d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}$.

Oss.: ω 1-forma olo. $\Rightarrow d\omega = 0$.

Pull-back di 1-forme: X, Y sdR, $F : X \to Y$ olo., ω 1-forma su Y, $F^*(\omega)$ 1-forma su X definita localmente nel seguente modo: $F : U \to V$ ($U \subseteq X$, $V \subseteq Y$), $F(u) = z$, $\omega = f\,dz + g\,d\bar{z}$, $F^*(\omega) = (f \circ F) \cdot F'\,du + (g \circ F) \cdot \bar{F}'\,d\bar{u}$.

Integrazione di 1-forme



X sdR, $U \subseteq X$, $\gamma : [a, b] \to U$ cammino.

Se $\phi : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ carta locale, $\phi \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z(t)$

Se ω è una 1-forma definita in U,
$\omega = f\,dz + g\,d\bar{z}$, $\int_\gamma \omega := \int_a^b \left(f(z, \bar{z}) \cdot z'(t) + g(z, \bar{z}) \cdot \bar{z}'(t)\right) dt$.

Se γ non sta in una carta, integro a tratti. Non dipende dalla scelta delle carte (per cambio di variabile).

1-forme meromorfe $\longleftrightarrow \omega = f(z)\,dz$, f mero..

Lemma: γ cammino semplice intorno a 0 unico polo di f in U ($0 \in U$). Allora $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega = \mathrm{Res}_0(f)$.

Usando le carte locali, posso definire $\mathrm{Res}_p(\omega)$, $p \in X$ e ω 1-forma mero. su X.

Ricordiamo Stokes: $\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$.

Teo. (dei residui): X sdR cpt, ω 1-forma mero. su $X \Rightarrow$ $\Rightarrow \sum_{p \in X} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0$.

Dim.: X cpt $\Rightarrow \exists\,\#$ finito di poli per ω, $\{p_1, \dots, p_m\}$.
$\forall p_j$ scegliamo un intorno D_j t.c. ∂D_j è un cammino semplice γ_j. Poniamo $D = X \setminus \bigsqcup_j D_j \Rightarrow \partial D = \bigsqcup_j \partial D_j$.
In termini di omotopia, $\partial D = -\sum_j \gamma_j$.
$\sum_p \mathrm{Res}_p(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{p_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\sum_j \int_{\gamma_j} \omega = -\frac{1}{2\pi i}\iint_D d\omega = 0$
perché ω è olo. in D. $\square$