Cor.: X sdR cpt, $f: X \to \mathbb{C}$ mero. non cost. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p f = 0$.

Dim.: data f, consideriamo $\omega = \frac{1}{f} df$. Localmente, se $\mathrm{ord}_p f = m$, allora $f(z) = c z^m + \underbrace{(\dots)}_{\text{termini di grado superiore}} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{c} z^{-m} + (\dots)$,
$df = (c m z^{m-1} + (\dots)) dz$. Pertanto, $\omega = \left(\frac{m}{z} + (\dots)\right) dz \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{Res}_p\left(\frac{df}{f}\right) = m = \mathrm{ord}_p f$. $\square$

Teoria dei fasci

X s.t.; $\mathcal{F}$ fascio in gruppi su $X \Leftrightarrow \forall U \subseteq X$ aperto, $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ gruppo abeliano e $\forall V \subseteq U$ aperto un morfismo di restrizione $\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.
$\sigma \mapsto \sigma_{|V}$

Proprietà richieste:

1) compatibilità: $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, $\rho_{UU} = id$, $W \subseteq V \subseteq U \Rightarrow \rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$;
2) località: $\mathcal{U} = \{U_j\}$ ricoprimento aperto di U, se dato $\sigma \in \mathcal{F}(U)$
$\sigma_{|U_j} = 0 \ \forall j \Rightarrow \sigma = 0$ e dati $\{s_j\} \in \mathcal{F}(U_j)$ t.c.
$s_{j|U_j \cap U_{j'}} = s_{j'|U_j \cap U_{j'}}$ allora $\exists s \in \mathcal{F}(U)$ t.c. $s_{|U_j} = s_j \ \forall j$.

Nota: se vale solo 1) si dice prefascio. Dato un prefascio, esiste un modo per costruire un fascio associato.

Spiga di $\mathcal{F}$ in un pto x: $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \{s_U \in \mathcal{F}(U) \mid U \ni x\}/_\sim$,
$s_U \sim s_V$ se $\exists W \subseteq U \cap V$ t.c. $s_{U|W} = s_{V|W}$.

Es.:
- fascio costante $\mathbb{C} = \mathbb{C}$, $U \mapsto \mathbb{C}(U) = \mathbb{C}$, $\rho_{UV} = id \ \forall V \subseteq U$;
- fascio delle funzioni olo.: $\mathcal{O}_X(U) = \{f: U \to \mathbb{C} \text{ olo.}\}$;
- " " " mero.: $\mathcal{M}_X(U) = \{f: U \to \mathbb{C} \text{ mero.}\}$.

Dato $x \in X$, chi è la spiga $\mathcal{O}_{X,x}$? $\mathcal{O}_{X,x} = \left\{ \begin{matrix} f \in \mathcal{M}(X) \text{ t.c. } f \text{ non ha} \\ \text{poli in } X \end{matrix} \right\}/_\sim$.

Morfismo di fasci

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ fasci su X.
$f: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ morfismo $\Leftrightarrow \forall U \subseteq X$ aperto $f_U: \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(V)$ t.c. $[f_U(\sigma)]_V = f_V(\sigma_{|V})$.

Proprietà: $\mathrm{Ker} f = \{\mathrm{Ker}(f_U)\}$ è un fascio;
$U \mapsto \mathrm{coker} f_U$, $U \mapsto \mathrm{Im} f_U$ sono prefasci.

È possibile dare struttura di fascio a $\mathrm{coker} f$ e $\mathrm{Im} f$, ovvero $\mathrm{coker} f = \bigcup_{x \in X} [\underbrace{\mathrm{coker} f}_{\text{il coker prefascio}}]_x$.

Concretamente: $[\mathrm{coker} f](U) = \{$classi di equiv. $\sigma \in \mathcal{F}(U)\}$, classi di equiv. rispetto a: $\{U_\alpha\}$ ricoprimento di U, $\forall \alpha$ sia $\sigma_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, $\sigma_\alpha \sim \sigma_\beta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sigma_{\alpha|U_\alpha \cap U_\beta} - \sigma_{\beta|U_\alpha \cap U_\beta} \in [f_{U_\alpha \cap U_\beta}(\mathcal{E}(U_\alpha \cap U_\beta))]$ più il raffinamento t.c., dati $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$, $\{(V_j, s_j)\}$, $\forall x \in U_\alpha \cap V_j \ \exists W \subseteq U_\alpha \cap V_j$ t.c.
$\sigma_{\alpha|W} - s_{j|W} \in f_W(\mathcal{E}(W))$.

SUCCESSIONE ESATTA DI FASCI

$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$, ψ suri., φ ini., $\mathrm{Im}\, \varphi = \mathrm{Ker}\, \psi$.

Prop./def.: $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ è esatta $\Leftrightarrow \forall x \in X$
$0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \to 0$ " " .

Es. (importante): X sdR, $p \in X$. $0 \to \mathcal{I}_p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}_p \to 0$.
$\mathcal{O}_X$ = fascio delle funzioni olo., ψ = valutazione in p,
$\mathbb{C}_p$ = fascio grattacielo supportato in p ($(\mathbb{C}_p)_x = \mathbb{C}$ se $x = p$ e $= 0$ se $x \neq p$), $\mathcal{I}_p = \mathrm{Ker}\, \psi = \{f \in \mathcal{O}_X \mid f(p) = 0\}$ fascio di ideali.

Fasci invertibili

Def.: $\mathcal{L}$ si dice invertibile se $\exists$ ricoprimento $\{U_j\}$ t.c.:
- $\forall j \ \exists$ isomorfismo $\phi_j: \mathcal{L}(U_j) \to \mathcal{O}(U_j)$;
- $\forall j, j' \ \exists \underbrace{f_{jj'}}_{\text{cociclo}}$ invertibile definita in $U_j \cap U_{j'}$ t.c.
$\phi_j(z) = f_{jj'}(z) \phi_{j'}(z) \ \forall z \in U_j \cap U_{j'}$.

Prop.: F fibrato in rette $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ fascio invertibile.

Dim.: F fibrato in rette $\Leftrightarrow \tilde{f}_j: F_{|U_j} \cong U_j \times \mathbb{C}$,
$z \mapsto (z, f_j(z))$
$g_{jj'}$ t.c. $f_j = g_{jj'} f_{j'}$. Ad F fibrato si associa $\mathcal{F}$ il fascio delle sezioni di F $\mathcal{F}(U_j) = \{\underbrace{f_j}_{\text{la stessa della banalizzazione di } F}: U_j \to \mathbb{C}\}$, $g_{jj'}$ cociclo. $\square$