Coomologia di Čech

$\mathcal{F}$ fascio su X, $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento di X loc. finito.

<u>Co-catene</u>: $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\ni f \longleftrightarrow$ collezione di $f_{\alpha_0\dots\alpha_p}$ in $U_{\alpha_0}\cap\dots\cap U_{\alpha_p}$ $\forall (p+1)$-upla $\alpha_0,\dots,\alpha_p$.

$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})=\prod \mathcal{F}(U_{\alpha_0}\cap\dots\cap U_{\alpha_p})$.

Operatore di cobordo: $d: C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$,

$$(df)_{\alpha_0\dots\alpha_{p+1}}=\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j f_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_j\dots\alpha_{p+1}}|_{U_{\alpha_0}\cap\dots\cap U_{\alpha_{p+1}}}$$

Oss.: $d^2=d\circ d=0$.

Poniamo $Z_p=\operatorname{Ker} d_p$ i p-COCICLI, $B_p=\operatorname{Im} d_{p-1}$ i p-COBORDI.

Oss.: $B_p\subseteq Z_p$.

$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}):=Z_p/B_p$.

Def.: $\check{H}^p(X,\mathcal{F})=\lim\limits_{\mathcal{U}<\mathcal{W}}\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, limite fatto sui raffinamenti.

Oss.: se X è varietà algebrica e $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ si stabilizza per ricoprimenti affini.

Prop.: X var. comp. $\Rightarrow \check{H}^p(X,\mathbb{R})=H^p_{DR}(X,\mathbb{R})=H^p_{sing}(X,\mathbb{R})$.

Nota: $H^0(X,\mathcal{F})=\{f \text{ definite su tutto } X\}=\mathcal{F}(X)$. Infatti, $B_0=\{0\}$ e $Z_0=\{f_{\alpha_j}\mid f_{\alpha_j}-f_{\alpha_{j'}}=0 \text{ in } U_j\cap U_{j'}\}$ e si usa località.

Es.: X sdR cpt, $\mathcal{O}_X$ fascio delle funzioni olo. $\Rightarrow H^0(X,\mathcal{O}_X)=\mathbb{C}$.

Def.: un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli si dice COERENTE se $\forall x\in X\ \exists U\ni x$ t.c. $\mathcal{O}_X(U)^m\longrightarrow\mathcal{O}_X(U)^n\longrightarrow\mathcal{F}(U)\longrightarrow 0$.

Es.: $\mathcal{F}$ è invertibile $\iff \mathcal{O}_X(U)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{F}(U)$.

Es.: $\underset{\substack{\downarrow\\ \text{sdR}}}{\Omega^1_X}=\{1\text{-forme olo.}\}=\{\omega\mid \text{loc. } \omega=f(z)dz\}$, $\mathcal{O}_X(U)\twoheadrightarrow\Omega^1_X(U)$, $f(z)\longmapsto f(z)dz$.

$\operatorname{supp}(\mathcal{F})=\overline{\{x\in X\mid \mathcal{F}_x\neq 0\}}$ è il SUPPORTO DI $\mathcal{F}$.

Teo.: X var. comp. cpt, $\mathcal{F}$ fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli coerente $\Rightarrow$ $\Rightarrow \check{H}^p(X,\mathcal{F})$ è s.v. di dim. $<+\infty$ ed è $=0$ $\forall p>\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{supp}(\mathcal{F}))$.

Cor.: X sdR cpt $\Rightarrow H^j(X,\mathcal{F})=0\ \ \forall j\geq 2$.

Teo.: X var. comp. cpt, $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0$ succ. esatta di $\mathcal{O}_X$-moduli coerenti; allora:

1) $\exists$ succ. esatta lunga ad essa associata
$0\to H^0(X,\mathcal{F})\to H^0(X,\mathcal{G})\to H^0(X,\mathcal{H})\to H^1(X,\mathcal{F})\to\dots$;

2) $\chi(\mathcal{G})=\chi(\mathcal{F})+\chi(\mathcal{H})$, dove $\chi(\mathcal{F})=\sum(-1)^j\cdot\dim_{\mathbb{C}}H^j(X,\mathcal{F})$.

Dim. (idea): 1) sia $\sigma\in H^0(X,\mathcal{H})$. σ corrisponde a $\{(U_\alpha,\sigma_\alpha)\}$ e possiamo scegliere un eventuale raffinamento t.c. $\forall\alpha$ $0\to\mathcal{F}(U_\alpha)\to\mathcal{G}(U_\alpha)\to\mathcal{H}(U_\alpha)\to 0$. Consideriamo due aperti U_α, U_β. $\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0\Rightarrow\exists(U_\alpha,s_\alpha),(U_\beta,s_\beta)$ t.c. $s_\alpha\mapsto\sigma_\alpha$, $s_\beta\mapsto\sigma_\beta$. Poniamo $\tilde{\partial}(\sigma)=s_\alpha-s_\beta=g_{\alpha\beta}$. $g_{\alpha\beta}\in\mathcal{G}(U_\alpha\cap U_\beta)$. D'altra parte, $\sigma_\alpha\underset{\substack{\downarrow\\ \sigma\in Z_0}}{=}\sigma_\beta$ in $U_\alpha\cap U_\beta\Rightarrow$
$\Rightarrow g_{\alpha\beta}\mapsto 0\in\mathcal{H}(U_\alpha\cap U_\beta)\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists f_{\alpha\beta}\in\mathcal{F}(U_\alpha\cap U_\beta)$ t.c. $f_{\alpha\beta}\mapsto g_{\alpha\beta}$.
Poniamo $\partial(\sigma)=\{(U_\alpha\cap U_\beta, f_{\alpha\beta})\}\in H^1(X,\mathcal{F})$.
Per $p>1$ la dim. è analoga.
2) Si ottiene spezzando in successioni esatte corte. $\square$

<u>GAGA principle</u>

X varietà proiettiva $\subseteq\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$	$X\subseteq\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ vista come var. comp.
topologia di Zariski	topologia di Hausdorff
$\mathcal{O}_X^{alg}=\{\text{fascio delle } f \text{ regolari}\}$	$\mathcal{O}_X^h=\{\text{fascio delle } f \text{ olo.}\}$

Esiste un funtore $\mathcal{F}$ fascio coerente di $\mathcal{O}_X^{alg}$-moduli $\longmapsto\mathcal{F}^h:=\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X^{alg}}\mathcal{O}_X^h$.

Allora $H^j_{Zar}(X,\mathcal{F})\cong H^j_{Haus}(X,\mathcal{F}^h)$.

Divisori

X sdR.

Def.: un divisore D su X è $D=\sum_{p\in X}D(p)\cdot p$ dove $D(p)\in\mathbb{Z}$ e $D(p)\neq 0$ in un numero finito di punti.
$D(p):=\operatorname{molt}_p(D)$, $\deg(D):=\sum_{p\in X}D(p)\in\mathbb{Z}$.

In generale, se $\dim X\geq 2$, $D=\sum D(H)\cdot H$ con H sottovar. di codim. 1.

$\operatorname{Div}(X):=\{\text{divisori su } X\}$. Introduciamo un'operazione $+$ nel modo ovvio.

$(\operatorname{Div}(X),+)$ è un gruppo commutativo e $\deg:\operatorname{Div}(X)\to\mathbb{Z}$ è un omomorfismo di gruppi.

Def.: X sdR cpt, $f:X\to\mathbb{C}_\infty$ mero., $\operatorname{div}(f):=\sum_{p\in X}\operatorname{ord}_p(f)\cdot p$ $\rightarrow$ è un DIVISORE PRINCIPALE

Teo. dei residui $\Rightarrow\deg(\operatorname{div}(f))=0$.

Es.: $f:\mathbb{P}^1\to\mathbb{C}_\infty$, $f(z_0,z_1)=\dfrac{z_0(z_0-z_1)}{z_1^2}$;
$\operatorname{div}(f)=1\cdot[0:1]+1\cdot[1:1]-2\cdot[1:0]$.

$\operatorname{div}(f)=\underset{\substack{\downarrow\\ \text{zeri}}}{\operatorname{div}_0(f)}-\underset{\substack{\downarrow\\ \text{poli}}}{\operatorname{div}_\infty(f)}$. $\operatorname{div}(f\cdot g)=\operatorname{div}(f)+\operatorname{div}(g)$.

Def.: $D=\sum D(p)\cdot p$ si dice effettivo se $D(p)\geq 0\ \forall p$.
Scriamo $D\geq 0$. $D_1\geq D_2\overset{\text{def.}}{\iff}D_1-D_2\geq 0$.

In generale si ha una decomposizione $D=D_+-D_-$, $D_+,D_-\geq 0$.

Def.: D divisore su X. $\mathcal{O}_X(D)$ è il fascio invertibile associato a D, definito come $\mathcal{O}_X(D)[U]=\{f \text{ mero. in } U\mid \operatorname{ord}_p(f)+D(p)\geq 0\ \forall p\in U\}$.

Cioè: se $D=\sum n_p\cdot p=D_+-D_-=\sum_{n_p\geq 0}n_p\cdot p-\sum_{m_q\geq 0}m_q\cdot q$,
$\mathcal{O}_X(D)\longleftrightarrow f$ t.c. $\{\text{poli di } f\}\subseteq\{p\mid n_p>0\}$ e $\operatorname{ord}_p(f)\geq -n_p$,
e simile per gli zeri (ma $\{\text{zeri di } f\}\supseteq\{q\mid m_q>0\}$).

Es.: $X=\mathbb{P}^1$, $p=[1:0]$, $D=1\cdot p$.
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)[U_0]=\{f \text{ mero. in } U_0\mid\operatorname{div}(f)\geq -p\}=$
$=\{\text{" " " "}\mid\operatorname{ord}_p(f)\geq -1\}=$
$=\{f\mid f(z)=g(z)/z,\ g \text{ olo. in } U_0\cong\mathbb{C}\}$.
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)[U_1]=\{f:U_1\to\mathbb{C}\text{ olo.}\}$.
Sezioni globali $\longleftrightarrow H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D))$:
in U_0 $\quad\dfrac{g(z)}{z}=\sum_{j\geq -1}c_j z^j$,
in U_1 $\quad\sum_{j\geq -1}c_j w^{-j}$, olo. $\iff c_j=0\ \forall j\geq 1$.
Quindi $H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1\cdot p))=\{c_0/z+c_1\}=\left\{\dfrac{c_0z_0+c_1z_1}{z_1}\right\}\cong$
$\cong\{\text{pol. di grado } 1\}$. Il cociclo di transizione è $\dfrac{z_1}{z_0}$.