Prop.: $\mathcal{O}_X(D)$ è un fascio invertibile.

Dim.: sia $\{p_1, \dots, p_m\}$ il supporto di D.

$U_0 = X \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ è un aperto t.c. $[\mathcal{O}_X(D)][U_0] = \mathcal{O}_X[U_0]$.

$\forall p_j$ scegliamo $U_j \ni p_j$, $U_j \cap U_{j'} = \emptyset$ $\forall j = j'$.

$D_{|U_j} = n_j p_j$, cioè localmente $D_{|U_j} = div(\varphi_j)$, $\varphi_j : U_j \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^{n_j}$.

Poniamo $\Phi_j : \mathcal{O}_X(U_j) \to [\mathcal{O}_X(D)][U_j]$.
$f \longmapsto \frac{1}{\varphi_j} f$

Φ_j mi dà un iso. locale, e φ_j lo penso come generatore locale. $\square$

In generale: $\{U_j\}$ ricoprimento, Φ_j, φ_j come sopra;
se $U_j \cap U_{j'} \neq 0$ il cociclo è $g_{jj'} = \frac{\varphi_{j'}}{\varphi_j}$.

$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{$sezioni globali di $\mathcal{O}_X(D)\} =$
$= \{f$ mero. su $X \mid div(f) + D \geqslant 0\} =: L(D)$, è s.v. di dim. $< +\infty$.

Es.: $X = \mathbb{P}^1$, $D = 2 \cdot p$, $p = [1:0]$. $[\mathcal{O}_X(D)][U_0] = \{\frac{f}{z^2} \mid f$ olo.$\}$, $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$, $z = z_1/z_0$

$\frac{f(z)}{z^2} \xleftrightarrow[w = 1/z]{} w^2 f\left(\frac{1}{w}\right)$ non deve avere poli $\Rightarrow$

$\Rightarrow \deg f \leqslant 2$. Conclusione: $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2 \cdot p)) \cong$
$\cong \{\frac{1}{z^2} f(z) \mid f$ pol. di grado $\leqslant 2\} \cong \left\{\frac{a z_0^2 + b z_0 z_1 + c z_1^2}{z_1^2}\right\}$.

Prop.: $X = \mathbb{P}^1$, D divisore di grado $d \geqslant 0$. Allora
$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{$pol. di grado $\leqslant d\}$.

Dim.: sia $D = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \lambda_j + e_\infty \cdot \infty$, $e_j, e_\infty \in \mathbb{Z}$, $\lambda_j \in \mathbb{C} \cong U_0$, $\infty = [0:1]$.

$\deg D = \sum_{j=1}^{n} e_j + e_\infty$. Poniamo $f_D = \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j)^{-e_j}$.

La tesi diventa $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{f_D(z) g(z) \mid g$ pol. di grado $\leqslant d\} = (1)$.

$div(f_D) = \sum_{j=1}^{n} -e_j \lambda_j + \left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right) \cdot \infty$.

$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f$ mero. $\mid div(f) + D \geqslant 0\} = (2)$. Tesi: $(1) = (2)$.

Consideriamo $f_D(z) \cdot g(z)$, g pol. di grado $\leqslant d$.

$div(f_D \cdot g) = div(f_D) + div(g) =$
$= \sum_{j=1}^{n} -e_j \lambda_j + [div(g)]_{|U_0} + \left(\sum_{j=1}^{n} e_j - \deg g\right) \cdot \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow div(f_D \cdot g) + D \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} e_j + e_\infty - \deg g\right) \cdot \infty \geqslant 0$. $\deg g \leqslant d = \deg D$

Viceversa, sia $h \in (2)$. Poniamo $g = \frac{h}{f_D}$.

Tesi: $g_{|U_0}$ è pol. di grado $\leqslant d$.

$div(g) = div(h) - div(f_D) \geqslant -D - div(f_D) =$
$= -\deg D \cdot \infty$, cioè g ha un polo in ∞ di ordine $\leqslant d$. $\square$

EQUIVALENZA LINEARE DI DIVISORI

X sdR cpt, D_1, D_2 divisori su X.

Def.: D_1 e D_2 si dicono linearmente equivalenti se $\exists f : X \to \mathbb{C}$ mero. t.c. $div(f) = D_1 - D_2$.

Notazione: $D_1 \equiv D_2$, $D_1 \sim D_2$.

Prop.: 1) quella sopra è una rel. di equiv.;
2) $D \sim 0 \iff D = div(f)$;
3) $D_1 \sim D_2 \Rightarrow \deg D_1 = \deg D_2$.

Dim.: ovvia. $\square$

Es.: 1) $X = \mathbb{P}^1$, $D_1 = p_1$, $D_2 = p_2$, $p_1, p_2 \in U_0 \cong \mathbb{C}$ $p_1 \leftrightarrow \lambda_1$, $p_2 \leftrightarrow \lambda_2$,
$f(z) = \frac{z - \lambda_1}{z - \lambda_2}$;

2) $D_1 = 2 \cdot p$, $p = [1:0]$, $D_2 = p_1 + p_2$, $p_j \leftrightarrow \lambda_j \in \mathbb{C}$,
$f(z) = \frac{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}{z^2}$.

SISTEMA (O SERIE) LINEARE ASSOCIATO A D

Def.: D divisore. Il sistema lineare (completo) associato a D è
$|D| = \{E \in Div(X) \mid E \sim D, E \geqslant 0\}$.

Teo.: $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))) \cong |D|$.
$\varphi : [f] \longmapsto div(f) + D$

Dim.: $div(\lambda \cdot f) = div(f)$ $\forall \lambda \neq 0 \Rightarrow \varphi$ è ben def..

φ suri.: sia E divisore t.c. $E \sim D$, $E \geqslant 0$; esiste f mero. t.c. $div(f) + D = E \geqslant 0 \Rightarrow f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, $\varphi([f]) = E$.

φ ini.: siano $f, g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ t.c. $\varphi([f]) = \varphi([g]) \Rightarrow$
$\Rightarrow div(f) + D = div(g) + D \Rightarrow div(f) = div(g) \Rightarrow$
$\Rightarrow div(f/g) = 0 \Rightarrow f/g$ olo. $\Rightarrow f/g$ cost.. $\square$

Dato D divisore di X sdR cpt consideriamo una base $\{\sigma_0, \dots, \sigma_N\}$ di $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Definiamo una mappa razionale
$\varphi_{|D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))^*)$.
$p \longmapsto [\sigma_0(p) : \dots : \sigma_N(p)]$

Problemi: 1) $\varphi_{|D|}$ è ben def.?
2) Se $\sigma_0(p) = \dots = \sigma_N(p) = 0$ $\varphi_{|D|}$ non può essere definita.

Risoluzione di 2):

Def.: $p \in X$ si dice PUNTO BASE per $|D|$ (o equivalentemente per $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$) se $p \in \operatorname{supp} E$ $\forall E \in |D|$.

Equivalentemente: $\forall \sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ $\sigma(p) = 0$.

Quindi, se $|D|$ è un sistema lineare e b.p.-free, allora $\varphi_{|D|}$ è definita $\forall p$ (è un morfismo).

Per 1):

Lemma: sia $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$, $p \mapsto [\sigma_0(p) : \dots : \sigma_n(p)]$, σ_j mero.. Supponiamo che $\forall p$ $\exists j$ t.c. $\sigma_j(p) \neq 0$; allora φ si estende a $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$ olo..

Dim.: sia p polo. per qualche σ_j. Poniamo $m = \min\{ord_p(\sigma_j)\} < 0$.
Poniamo $g_j = z^{-m} \sigma_j$, z coord. locale in p.
Allora $\Phi = [g_0 : \dots : g_m]$ è data da funziono olo. in un intorno di p. $\square$