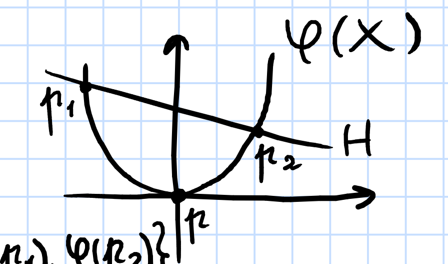
Un sottosistema lineare $S \subseteq |D|$ corrisponde, per def., a un sottospazio lineare $V \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ (e poi si proiettivizza).

Es.: $X = \mathbb{P}^1$, $D = 2\cdot[1:0]$, $E_1 = p_1 + p_2$, $p_1 = [1:1]$, $p_2 = [0:1]$.
$0 \leq E_1 \sim D$. $E_2 = q_1 + q_2$, $q_1 = [1:\lambda_1]$, $q_2 = [1:\lambda_2]$.
$0 \leq E_2 \sim D$. Si possono fare combo. lineari (usando le f_1 e f_2 associate).

Teo.: $\left\{ \begin{array}{l} \text{sistemi lineari } V \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \\ \text{senza pti base e t.c.} \\ \deg(D) = d,\ \dim V = n+1 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{mappe olo. non degeneri} \\ \varphi : X \to \mathbb{P}^n \text{ t.c. } \deg(\varphi^*(H)) = d, \\ H = \text{iperpiano} \end{array} \right\} / \sim$,
dove $/\sim$ "=" /proiettività e φ non degenere $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi(X)$ non è contenuto in un iperpiano.

Dim.: $(\longrightarrow)$ sia $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$ base di V.
$\varphi_V : X \to \mathbb{P}^n$, $p \mapsto [\sigma_0(p) : \dots : \sigma_n(p)]$ è olo. per il lemma della volta scorsa (V non ha pti base), e non degenere perché $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ lin. indi..
$(\longleftarrow)$ Definiamo $\varphi^*(H)$. $H = \{h = 0\}$. Sia $\varphi(p) \in H \cap \varphi(X)$.
Consideriamo un iperpiano $H_0 = \{h_0 = 0\}$ un iperpiano che non passa per $\varphi(p)$. $\mathrm{ord}_p(\varphi^*(H)) := \mathrm{ord}_p\left(\frac{h}{h_0} \circ \varphi\right)$.
$\varphi^*(H) := \sum_p (\mathrm{ord}_p(\varphi^*(H))) \cdot p$. La tesi diventa:
$\{\varphi^*(H) \mid H \subseteq \mathbb{P}^n \text{ iperpiano}\} \cong V \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, dove
$D = -\sum_p \min_j \{\mathrm{ord}_p(\sigma_j)\} \cdot p$ con $\varphi = [\sigma_0 : \dots : \sigma_n]$, σ_j mero..
$h = \sum_j a_j y_j$, y_j coordinate in $\mathbb{P}^n$. Sia $\sigma_{j'}$ t.c.
$\mathrm{ord}_p(\sigma_{j'}) = -\mathrm{ord}_p(D)$. Poniamo $h_0 = y_{j'}$, quindi
$\frac{h}{h_0} \circ \varphi = \sum_j \frac{a_j \sigma_j}{\sigma_{j'}}$ e $\mathrm{ord}_p(\varphi^*(H)) = \mathrm{ord}_p(\sum a_j \sigma_j) - \mathrm{ord}_p(\sigma_{j'}) =$
$= \mathrm{ord}_p(\sum a_j \sigma_j) + \mathrm{ord}_p(D) \Rightarrow \varphi^*(H) = \mathrm{div}(f) + D$,
$f = \sum a_j \sigma_j$. $\square$

Es.: $X = \mathbb{P}^1$, $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$, $[z_0 : z_1] \mapsto \left[\frac{z_0^2}{z_1^2} : \frac{z_0 z_1}{z_1^2} : \frac{z_1^2}{z_1^2}\right]$.



$D = 2\cdot[1:0] = 2\cdot p$.
$H = \{a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0\}$, $H \cap \varphi(X) = \{\varphi(p_1), \varphi(p_2)\}$,
$\varphi^*(H) = \mathrm{div}(a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2) + 2p = \mathrm{div}(a_0 z_0^2 + a_1 z_0 z_1 + a_2 z_1^2) =$
$= p_1 + p_2$.

Immagine inversa di divisori (rispetto a morfismi tra sdR)

X, Y sdR cpt, $f : X \to Y$ olo., $q \in Y$ pto.
$f^*(q) := \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{molt}_p(f) \cdot p$. $D = \sum_q n_q \cdot q \in \mathrm{Div}(Y)$,
$f^*(D) := \sum_q n_q \cdot f^*(q) \in \mathrm{Div}(X)$.
Proprietà: i) $f^* : \mathrm{Div}(Y) \to \mathrm{Div}(X)$ è omo. di gruppi;
ii) $g : Y \to \mathbb{C}$ mero. $\Rightarrow f^*(\mathrm{div}(g)) = \mathrm{div}(f^*(g)) = \mathrm{div}(g \circ f)$;
iii) $\deg(f^*(D)) = \deg(f) \cdot \deg(D)$;
iv) $f^*(\mathcal{O}_Y(D)) = \mathcal{O}_X(f^*(D))$.

Teo.: $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ olo. non degenere. Supponiamo $\varphi(X) = Y$ liscia (cioè SdR). Allora $\deg(\varphi^*(H)) = \deg(Y) \cdot \deg(\varphi)$, dove $\deg Y := \deg(Y \cap H)$. $\to$ visto come divisore su Y (conto i pti)

Dim.: $\deg(\varphi^*(H)) = \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(\varphi^*(H)) = \sum_{p \in X} \mathrm{molt}_p(\varphi) \cdot \mathrm{ord}_{\varphi(p)}(H) =$
$= \sum_{q \in Y} \left(\sum_{p \in \varphi^{-1}(q)} \mathrm{molt}_p(\varphi) \cdot \mathrm{ord}_q(H) \right) =$
$= \deg(\varphi) \cdot \sum_{q \in Y} \mathrm{ord}_q(H)$. $\square$

Divisore canonico

Ω^1_X = fascio delle 1-forme olo. su X. Localmente,
$\Omega^1_X \ni \omega \longleftrightarrow f(z)dz$, f olo..
$\mathcal{U} = \{U_j\}$ ricoprimento, $\varphi_j : U_j \to \Delta_j \subseteq \mathbb{C}$. In $U_j \cap U_{j'}$,
$\omega \longmapsto f_j(z_j)dz_j =: \omega_j$
$\omega_{j'} = \omega_j \cdot \varphi'_{jj'}$ poiché $dz_{j'} = \varphi'_{jj'} dz_j$.

Prop.: $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1_X$. Allora $\exists!$ g mero. t.c. $\omega_2 = g\omega_1$.

Dim.: scegliamo un ricoprimento comune $\mathcal{U} = \{U_j\}$. In U_j,
$\omega_l = f_j^{(l)}(z_j)dz_j$, $l = 1, 2$. Poniamo g definita localmente in U_j come $g_{|U_j} = \frac{f_j^{(2)}}{f_j^{(1)}}$. In $U_j \cap U_{j'}$:
$\frac{f_{j'}^{(2)}}{f_{j'}^{(1)}} = \frac{f_j^{(2)} \varphi'_{jj'}}{f_j^{(1)} \varphi'_{jj'}} = \frac{f_j^{(2)}}{f_j^{(1)}} \Rightarrow$ posso estendere g a tutto X. $\square$

Def.: $\omega \in \Omega^1_X$ 1-forma. Il divisore associato a ω
$\mathrm{div}(\omega) := \sum_p \mathrm{ord}_p(\omega) \cdot p$ si dice DIVISORE CANONICO.
$\hookrightarrow \mathrm{ord}_p(f)$, localmente

La prop. $\Rightarrow \mathrm{div}(\omega_1) = \mathrm{div}(g) + \mathrm{div}(\omega_2) \Rightarrow \mathrm{div}(\omega_1) \sim \mathrm{div}(\omega_2)$.
Quindi appartengono allo stesso sistema lineare.
Notazione: $K_X = \mathrm{div}(\omega)$ per $\omega \in \Omega^1_X$ è un divisore canonico.
Oss.: 1) due divisori canonici su X sono lin. equiv., e $|K_X|$ è il sistema lineare canonico;
2) $\mathcal{O}_X(K_X) \cong \Omega^1_X$ come fasci invertibili.

Es.: 1) $\Omega^1_{\mathbb{P}^1}$. $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$. In $U_0 \cap U_1$, $w = \frac{1}{z} \Rightarrow w' = -\frac{1}{z^2}$.
$\omega = f_0 dz$ in U_0, $\omega = f_1 dw$ in U_1; in $U_0 \cap U_1$ dev'essere
$f_0(z) = -f_1(1/z) \cdot \frac{1}{z^2}$, cioè $\frac{f_0}{f_1} = -\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2 = -\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{-2}$,
il cociclo associato. Se scelgo $f_1 = 1 \Rightarrow f_0 = -1/z^2$,
allora $\mathrm{div}(\omega) = -2\cdot[1:0]$, cioè $\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2p) =: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$.