Es.: 2) X sdR cpt di genere $g=1 \Rightarrow X \cong \mathbb{C}/\Lambda$, Λ reticolo.
Scegliamo $\omega = 1 \cdot dz$, z coord. locale (in $\mathbb{C}$). ω si estende a tutto $\mathbb{C} \Rightarrow$ si estende a tutto X, il cociclo è 1.
$K_X = \mathrm{div}(\omega) = 0 \Rightarrow \Omega^1_X \cong \mathcal{O}_X$.

Teo. (Riemann-Hurwitz): X, Y sdR cpt, $\pi : X \to Y$ olo. non cost.. Allora $K_X \sim \pi^*(K_Y) + R$, R divisore di ramificazione.

Dim.: sia ω_Y una 1-forma su Y, $\omega_Y = f(w)dw$ localmente.
$\pi_{|U} : \underset{X}{\underset{\cap}{U}} \to \underset{Y}{\underset{\cap}{V}}$, $z \mapsto z^m$ localmente ($\pi(p)=q$, $p=0 \in U \subseteq \mathbb{C}$, $q = 0 \in V \subseteq \mathbb{C}$).
$\pi^*(f(w)dw) \longleftrightarrow \pi^*(\omega_Y)$.
$\pi^*(f(w)dw) = m f(z^m) z^{m-1} dz \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{div}(\pi^*(\omega_Y))[U] = \pi^*(\mathrm{div}(\omega_Y)) + (\mathrm{ord}_p \pi - 1) \cdot p \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{div}(\pi^*(\omega_Y)) = \pi^*(\mathrm{div}(\omega_Y)) + R \Rightarrow$
$\Rightarrow K_X = \pi^*(K_Y) + R$. □

Teo.: sia X sdR cpt conn. di genere g, K_X un divisore canonico su X. Allora $\deg(K_X) = 2g-2$.

Dim.: $g = 0, 1$ visti. $g \geq 2$.
Fatto: per $d \gg 0$ $\exists\, \pi : X \to \mathbb{P}^1$ olo. di grado d.
RH $\Rightarrow \deg(K_X) = d \cdot \deg(K_{\mathbb{P}^1}) + \deg R$
Hurwitz $\Rightarrow \chi(X) = d \cdot \chi(\mathbb{P}^1) - \deg R$.
$\deg(K_{\mathbb{P}^1}) = -2$, $\chi(\mathbb{P}^1) = 2$, $\chi(X) = 2-2g$. □

In particolare, $\exists$ tre famiglie:
$g=0$, $\deg K_X < 0$;
$g=1$, $\deg K_X = 0$;
$g \geq 2$, $\deg K_X > 0$.

Problema: dato D divisore su X, vogliamo studiare $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ e $\varphi_{|D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))^*)$.

Oss.: $\deg D < 0 \Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$, poiché
$\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))) \cong |D| = \{E \in \mathrm{Div}(X) \mid E \sim D, E \geq 0\}$.

Abbiamo visto: dato $p \in X$ $\exists$ succ. esatta di fasci
$0 \to \underset{\text{f che si annullano in } p}{\mathcal{I}_p} \to \mathcal{O}_p \to \underset{\text{fascio grattacielo}}{\mathbb{C}_p} \to 0$.

Oss.: X sdR cpt, in particolare è liscia e $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$, quindi $\mathcal{I}_p \cong \mathfrak{m}_p \cong \mathcal{O}_X(-p)$, dove $\mathfrak{m}_p$ è l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,p}$ anello locale. Infatti, se localmente $p = \mathrm{div}(\varphi)$, cioè $U \ni p$, $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$, $\varphi(z) = z$ localmente, allora $\mathcal{O}_{X,p}$ è locale e $\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathcal{O}_{X,p} \mid f(p) = 0\}$, $\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p = \mathbb{C} \cong \mathbb{C}_p$.
$\mathcal{O}_X(-p)$ è generato da φ.
$f \in \mathcal{O}_X(-p)[U] \Longleftrightarrow f = \varphi \cdot g$, $g \in \mathcal{O}_X$, cioè posso scrivere
$0 \to \mathcal{O}_X(-p) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{val}} \mathbb{C}_p \to 0$.
$g \cdot \varphi \mapsto f \mapsto f(p)$

Questa successione si generalizza nel seguente modo.

Prop.: dato D divisore ≥ 0 t.c. $D = D' + p$, $\exists$ succ. esatta
$0 \to \mathcal{O}_X(D') \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathbb{C}_p \to 0$.

Dim.: 1° modo: tensorizziamo $0 \to \mathcal{O}_X(-p) \to \mathcal{O}_X \to \mathbb{C}_p \to 0$ con
$\mathcal{O}_X(D) \Rightarrow 0 \to \underset{\mathcal{O}_X(D')}{\underset{\parallel}{\mathcal{O}_X(-p) \otimes \mathcal{O}_X(D)}} \to \underset{\mathcal{O}_X(D)}{\underset{\parallel}{\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X(D)}} \to \underset{\mathbb{C}_p}{\underset{\parallel}{\mathbb{C}_p \otimes \mathcal{O}_X(D)}} \to 0$.
2° modo: $\mathcal{O}_X(D') \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_X(D)$ poiché $\mathrm{div} f + D' \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{div} f + D' + p \geq 0$ (moltiplico per φ perché lo voglio linearmente equiv.).
$\mathrm{coker}(\mathcal{O}_X(D') \hookrightarrow \mathcal{O}_X(D)) \cong \mathcal{O}_X(D)/\mathcal{O}_X(D') =$
$= \{f \mid \mathrm{div} f + D' = -p\}$.
Se $\mathrm{ord}_p(D') = m$, allora $f(z) = z^{-(m+1)} g(z)$ localmente,
cioè $\mathcal{O}(D)/\mathcal{O}(D') \cong \{f \mid \mathrm{ord}_p(f) \geq -m-1\}/\{f \mid \mathrm{ord}_p(f) \geq -m\} \cong$
$\mathbb{C} \cdot z^{-(m+1)} \cong \mathbb{C}_p$. □

Stima per $h^0(D)$

Notazione: $H^0(D) = H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, $h^j = \dim H^j$.

Prop.: X sdR cpt conn., D divisore di grado $d \geq 0 \Rightarrow h^0(D) \leq d+1$.

Dim.: induzione su d. $d=0$: $\mathbb{P}(H^0(D)) = |D| = \{E \mid E \geq 0, E \sim D\}$.
Se $h^0(D) > 0$ $\exists\, E \geq 0$, $E \sim D$, ma $\deg E = \deg D = 0 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(E) \cong \mathcal{O}_X \Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1$.
Sia $d > 0$ e supponiamo $H^0(D) \neq 0$. Scegliamo $E \sim D$, $E \geq 0$ e consideriamo $p \in \mathrm{supp}\, E$. Per la prop. precedente $\exists$ succ. esatta $0 \to \underset{\mathcal{O}_X(D-p)}{\underset{\wr\wr}{\mathcal{O}_X(E-p)}} \to \underset{\mathcal{O}_X}{\underset{\wr\wr}{\mathcal{O}_X(E)}} \to \mathbb{C}_p \to 0$.
$\rightarrow \deg = d-1$

Consideriamo la succ. esatta lunga
$0 \to H^0(D-p) \to H^0(D) \to \underset{\mathbb{C}}{\underset{\wr\wr}{H^0(\mathbb{C}_p)}} \to H^1(D-p) \to \dots$
e usiamo l'ipotesi induttiva. □

La succ. esatta $0 \to \mathcal{O}_X(D-p) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathbb{C}_p \to 0$ si generalizza considerando al posto di p un qualsiasi divisore effettivo Δ.

Passo 1: $\Delta = mP$, $0 \to \mathcal{O}_X(D-\Delta) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$,
$\mathcal{O}_\Delta \cong \mathcal{O}_{X,p}/(\mathcal{I}_p)^m \cong \mathbb{C}[[z]]/(z^m) \cong \mathbb{C}^m$,
$\mathcal{O}_X(D-\Delta) = \ker(\mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_\Delta) = \{f \in \mathcal{O}_X(D)$ che si annullano in p con ordine $\geq m\}$.

Passo 2: $\Delta = m_1 p_1 + \dots + m_\ell p_\ell$; posto $\Delta_j = m_j p_j$, scriviamo
$\mathcal{O}_\Delta = \bigoplus_j \mathcal{O}_{\Delta_j}$ e abbiamo $0 \to \mathcal{O}_X(D-\Delta) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$.