FORMULA DI RIEMANN-ROCH

X sdR cpt, $H^i(X,\mathcal{O}_X(D)) = H^i(D)$, $h^i(D)=\dim H^i(D)$.
$\chi(D)=\sum(-1)^i h^i(D)$.
↳ caratteristica di Eulero di $\mathcal{O}_X(D)$
X sdR $\Rightarrow h^i(D)=0\ \forall i\geq 2$.

Caso $D=0$: $\chi(\mathcal{O}_X):=\chi(X)=h^0(\mathcal{O}_X)-h^1(\mathcal{O}_X)$.

Def.: il GENERE ARITMETICO di X è $p_a(X)=1-\chi(\mathcal{O}_X)$.

Se X è sdR cpt conn., $h^0(\mathcal{O}_X)=1 \Rightarrow p_a(X)=h^1(\mathcal{O}_X)$.

Teo. (Riemann-Roch, 1ª versione): X sdR cpt, D divisore su X $\Rightarrow$
$\Rightarrow \chi(D)=\deg(D)+\chi(\mathcal{O}_X)$.

Dim.: passo 1: supponiamo D effettivo ($D=\sum m_i p_i$, $m_i\geq 0\ \forall i$).
Induzione sul grado: $\deg D=0 \underset{D\geq 0}{\Rightarrow} D=0$, ok.
Sia $\deg D>0$, prendiamo $p\in\operatorname{supp} D$ e scriviamo $D=D'+p$.
Prop. della volta scorsa $\Rightarrow \exists$ succ. esatta $0\to\mathcal{O}_X(D')\to\mathcal{O}_X(D)\to\mathbb{C}_p\to 0$.
$\mathbb{C}_p$ fascio grattacielo $\Rightarrow h^1(\mathbb{C}_p)=0$, $h^0(\mathbb{C}_p)=1$.
Per le proprietà di χ: $\chi(D)=\chi(D')+\chi(\mathbb{C}_p)=\chi(D')+1$.
D'altra parte D' è effettivo e $\deg D'=\deg D-1$, quindi per ipotesi induttiva $\chi(D')=\deg D'+\chi(X)$. Sommo.
Passo 2: caso generale. Scrivo $D=D_1-D_2$, $D_1,D_2\geq 0$.
Se $D_2=\sum m_i p_i$, pongo $\Delta_2=\oplus\Delta_2^{(i)}$ dove $\Delta_2^{(i)}\cong\mathbb{C}[[z]]/(z^{m_i})$, fascio grattacielo $\Rightarrow \exists$ succ. esatta
$0\to\mathcal{O}_X(D_1-D_2)\to\mathcal{O}_X(D_1)\to\Delta_2\to 0$.
$h^0(\Delta_2)=\sum h^0(\Delta_2^{(i)})=\sum m_i=\deg(D_2)$,
$h^1(\Delta_2)=0$ perché fascio grattacielo.
Per le proprietà di χ: $\chi(D_1)=\chi(D_1-D_2)+\chi(\Delta_2)$.
Per il passo 1 $\chi(D_1)=\deg(D_1)+\chi(X)$. Riarrangio. □

Riemann-Roch, 2ª versione

DUALITÀ DI SERRE: $H^1(D)^*\cong H^0(K_X-D)$.

Teo. (Riemann-Roch, 2ª versione): $h^0(D)-h^0(K_X-D)=\deg D+1-p_a(X)$.

In particolare: $H^1(\mathcal{O}_X)^*\cong H^0(K_X)$.

Def.: il genere geometrico è $p_g(X):=h^0(K_X)$.

Dualità di Serre: X sdR cpt conn. $\Rightarrow p_a(X)=p_g(X)$.

Prop.: X sdR cpt conn. di genere g $\Rightarrow g=p_a=p_g$.

Dim. (della prop.): applichiamo RR a K_X.

$$\underset{p_g}{\underset{\|}{h^0(K_X)}}-\underset{\underset{1}{\underset{\| \to X\text{ conn.}}{h^0(\mathcal{O}_X)}}}{\underset{\| \to \text{Serre}}{h^1(K_X)}}=\underset{2g-2}{\underset{\| \to RH}{\deg(K_X)}}+1-p_a(X) \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_g-1=2g-2+1-p_a\Rightarrow p_g+p_a=2g\Rightarrow p_g=p_a=g$. □

Teo. (RR, versione classica): $h^0(D)-h^0(K_X-D)=\deg D+1-g$.

DUALITÀ DI SERRE

- Problema di Mittag-Leffler

X sdR, $\{p_i\}$ insieme finito di pti. $\forall p_i$ (z coord. loc.) consideriamo un polinomio polare $h_i(z)=\sum_{k=-m_i}^{-1}a_k z^k$.

Problema: cerco f mero. su X t.c. è olo. su $X\setminus\{p_i\}$ e $\forall i$ la parte principale di polo di f è $=h_i$.
Localmente esiste sempre. Globalmente?

Coda di Laurent: $\pi_p(z):=\sum_{k\geq -m}^{h}a_k z^k$, $\deg\pi_p:=h$.

Un DIVISORE DI CODE DI LAURENT è una somma formale $\sum\pi_p\cdot p$ (somma finita); $T(X):=\{$divisori di code di Laurent$\}$.

Def.: se $D=\sum m_i p_i$ divisore,
$T(D):=$ fascio t.c. $T(D)[U]=\{\sum\pi_p\cdot p \mid \deg(\pi_{p_i})<-m_i\ \forall i\}$.

Es.: $D=0$, $T(D)=\{\sum\pi_p\cdot p\mid \deg(\pi_p)<0\ \forall p\}$.

$\exists$ mappa di troncamento $t_D: T(X)\to T(D)$, $\pi_{p_i}(z)=\sum_{k=-m}^{h}a_k z^k\mapsto$
$\mapsto t_D(\pi_{p_i})=\sum_{k=-m}^{-m_i-1}a_k z^k$, dove $D=\sum m_i\cdot p_i$.

Sia $\mathcal{M}$ il fascio delle funzioni mero. globali su X.

Fissato $D=\sum m_i p_i$, $\alpha_D:\mathcal{M}\to T(D)$, $f\mapsto\sum\pi_{p_i}\cdot p_i$, dove $\pi_{p_i}(z)=\sum_{k=-m}^{-m_i-1}a_k z^k$ (serie di Laurent di f).

Per costruzione $\exists$ succ. esatta $0\to\mathcal{O}_X(D)\xrightarrow{\iota_D}\mathcal{M}\xrightarrow{\alpha_D}T(D)\to 0$,
$\mathcal{O}_X(D)=\ker\alpha_D=\{f \text{ mero.}\mid \operatorname{ord}_{p_i}f\geq -m_i\}$. Inoltre, $T(D)=\operatorname{coker}\iota_D$. $\exists$ succ. esatta lunga
$0\to H^0(D)\to H^0(\mathcal{M})\to H^0(T(D))\to H^1(D)\to H^1(\mathcal{M})$.
Fatti: $H^0(\mathcal{M})=\mathcal{M}$, $H^1(\mathcal{M})=0$, cioè
$0\to H^0(D)\to\mathcal{M}\xrightarrow{\alpha_D}H^0(T(D))\to H^1(D)\to 0$,
$H^0(D)=\ker\alpha_D$, $H^1(D)=\operatorname{coker}\alpha_D$.

Adesso consideriamo $\mathcal{O}_X(K_X-D)\cong\Omega^1_X(-D)=$
$=\{\omega \text{ 1-forme olo.}\mid \operatorname{ord}_{p_i}\omega\geq m_i\}$.
$\operatorname{div}\omega\geq D$

MAPPA DI SERRE: $H^0(\Omega^1_X(-D))\times T(D)\xrightarrow{(*)}\mathbb{C}$.
$(\omega,t)\mapsto\operatorname{Res}(t\cdot\omega)$

Localmente in p_i: $\omega(z)=\sum_{h\geq m_i}c_h z^h dz$, $t(z)=\sum_{k=-m}^{-m_i-1}a_k\cdot z^k \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Res}(t\cdot\omega):=\sum_i\operatorname{Res}_{p_i}(t\cdot\omega)=\sum_i\sum_{k\geq m_i}a_{-k-1}\cdot c_k$.
↳ coefficiente di grado 1 del prodotto

Idea di Serre: $H^1(D)=\operatorname{coker}\alpha_D=T(D)/\operatorname{Im}\alpha_D$.

1) $H^0(K_X-D)\times\operatorname{Im}\alpha_D\xrightarrow{\operatorname{Res}}0$; passo al quoziente in (*) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Res}: H^0(\Omega^1_X(-D))\times \underset{H^1(D)}{\underset{\wr\|}{T(D)/\operatorname{Im}\alpha_D}}\to\mathbb{C}$.

2) $\operatorname{Res}: H^0(\Omega^1_X(-D))\times H^1(D)\to\mathbb{C}$ è un perfect pairing. → complicato

Cor.: X sdR cpt, $g=g(X)$, D divisore t.c. $\deg(D)\geq 2g-1\Rightarrow$
$\Rightarrow h^1(D)=0$.

Dim.: per dualità di Serre, $H^1(D)^*\cong H^0(K_X-D)$.
$\deg(K_X-D)<0\Rightarrow H^0(K_X-D)=0$. □