Divisori di grado alto

Def.: D divisore su X var. comp. si dice MOLTO AMPIO se $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}^m = \mathbb{P}(H^0(X,D)^*)$ è un embedding, cioè:
(0) $|D|$ è senza pti base (o, equivalentemente, $\varphi_{|D|}$ è un morfismo);
(1) $\varphi_{|D|}$ è ini.;
(2) $d_p\varphi_{|D|}$ è ini. $\forall p \in X$.
⚠ Nel contesto algebrico, non serve richiedere omeo. con l'immagine.

Def.: D si dice ampio se $\exists\, m>0$ t.c. mD è molto ampio.

Prop. (criterio per essere un embedding):
(0) $\varphi_{|D|}$ morfismo $\Leftrightarrow \forall p \in X\ \exists\, f \in H^0(X,D)$ t.c. $f(p) \neq 0$;
(1) $\varphi_{|D|}$ ini. $\Leftrightarrow \forall p,q \in X, p\neq q\ \exists\, f \in H^0(X,D)$ t.c. $f(p)=0,\ f(q)\neq 0$;
(2) $d_p\varphi_{|D|}$ ini. $\Leftrightarrow \exists\, f\in H^0(X,D)$ t.c. $ord_p(f-f(p))=1$.

Dim.: (0) $|D| \cong \mathbb{P}(H^0(X,D)) \cong \mathbb{P}(\{f \mid ord_p f \geq D(p)\})$. Data una base $\{\sigma_0,\dots,\sigma_m\}$ di $H^0(X,D)$, $\varphi_{|D|}: X \to \mathbb{P}(H^0(X,D)^*)$, $p \mapsto [\sigma_0(p):\dots:\sigma_m(p)]$.
Non è morfismo $\Leftrightarrow \exists\, p\ \sigma_j(p)=0\ \forall j \Rightarrow \exists\, p\ \forall f \in H^0(X,D)\ f(p)=0$.

pensalo usando gli iperpiani: (1) $\varphi_{|D|}$ ini. $\Leftrightarrow \forall p\neq q\ \ \varphi_{|D|}(p)\neq\varphi_{|D|}(q)$.
$\forall f \in H^0(X,D)$, o $f(p)=0$, o $\exists\, f_1 \in H^0(X,D), \lambda_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $(f+\lambda_1 f_1)(p)=0 \Rightarrow$ WLOG $f(p)=0$. Cioè, eventualmente cambiando base, $\exists\, j$ t.c. $\sigma_j(p)=0$, $\sigma_j(q)\neq 0$.

(2) Lo spazio tangente a X in p è $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ dove $\mathfrak{m}_p$ è l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,p}$.
$d_p\varphi_{|D|}: (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* = T_pX \to T_{\varphi_{|D|}(p)}\mathbb{P}^m \cong \mathbb{C}^m = Ker(H^0(X,D)\to\mathbb{C}_p)^*$
$d_p\varphi_{|D|}$ è ini. $\Leftrightarrow$ la mappa duale $Ker(H^0(X,D)\to\mathbb{C}_p)\to\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ è suri. $\Leftrightarrow$ ottengo tutte le funzioni $f\in H^0(X,D)$ t.c. $f(p)=0 \mapsto f\in\mathfrak{m}_p$ che si annullano di ordine $1 \Leftrightarrow \exists\, f \in H^0(X,D)$ t.c. $ord_p f = 1$. □

Teo.: X sdR cpt, D divisore su X.
(1) $|D|$ è senza pti base $\Leftrightarrow \forall p\in X\ \ h^0(X,D-p)=h^0(D)-1$;
(2) D è molto ampio $\Leftrightarrow \forall p,q\in X\ \ h^0(X,D-p-q)=h^0(D)-2$.

Dim.: (1) dato $p\in X$ consideriamo $0\to\mathcal{O}_X(D-p)\to\mathcal{O}_X(D)\to\mathbb{C}_p\to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0\to H^0(D-p)\to H^0(D)\xrightarrow{val} H^0(\mathbb{C}_p)\cong\mathbb{C}\Rightarrow$
$\Rightarrow H^0(D-p)\cong H^0(D)$ se e solo se $\forall f\in H^0(D)\ f(p)=0$ (cioè p è punto base di $\mathbb{P}(H^0(X,D))=|D|$, altrimenti $h^0(X,D-p)=h^0(D)-1$.

(2) Iniettività: $|D|$ è senza pti base:
$\forall p,q\ \ h^0(D-p)=h^0(D)-1,\ h^0(D-q)=h^0(D)-1$.
Se PA $\varphi_{|D|}(p)=\varphi_{|D|}(q)$ allora $H^0(D-p)=H^0(D-q)$, cioè tutte le sezioni di $H^0(D)$ che si annullano in p si annullano anche in $q \Rightarrow H^0(D-p-q)=H^0(D-p)=H^0(D-q)\Rightarrow$
$\Rightarrow h^0(D-p-q)=h^0(D)-1$, assurdo.
Viceversa, se $\exists\, p,q$ t.c. $h^0(D-p-q)=h^0(D)-1$, allora $H^0(D-q)\overset{\sim}{\leftarrow}H^0(D-p-q)\overset{\sim}{\rightarrow}H^0(D-q)\Rightarrow H^0(D-p)=H^0(D-q)\Rightarrow$
$\Rightarrow\varphi_{|D|}(p)=\varphi_{|D|}(q)$.
$d_p\varphi_{|D|}$ iniettivo: $H^0(X,D-p)\twoheadrightarrow\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H^0(D)\twoheadrightarrow\mathcal{O}_\Delta$, dove $\Delta=\mathbb{C}[[z]]/(z)^2$.
Infatti, se $U\ni p$ intorno, z coord. loc. t.c. $p\leftrightarrow 0$, $\mathfrak{m}_p\cong(z)$, $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\cong\{a\cdot z\mid a\in\mathbb{C}\}$.
$Ker(H^0(X,D)\to\mathcal{O}_\Delta)$ ha $codim=2\Leftrightarrow val_p$ è suri. e è suri. sui vettori tangenti in p.
Nel caso X sdR $Ker(H^0(D)\to\mathcal{O}_\Delta)\cong H^0(D-2p)\Rightarrow$
$\Rightarrow codim=2$ se e solo se $h^0(D-2p)=h^0(D)-2$. □

Applicazioni

Ricordiamo: $deg\,D<0\Rightarrow h^0(D)=0$;
dualità di Serre $\Rightarrow H^1(X,D)^*\cong H^0(X,K_X-D)$,
$deg(K_X-D)=2g-2-deg\,D$;
RR: $h^0(D)-h^1(D)=deg\,D+1-g$.

Teo.: X sdR cpt conn. di genere g, D divisore di grado d.
(1) $d\geq 2g-1\Rightarrow h^1(D)=0$ (già visto);
(2) $d\geq 2g\Rightarrow |D|$ è senza pti base;
(3) $d\geq 2g+1\Rightarrow D$ molto ampio.

Cor.: $deg\,D>0\Rightarrow D$ ampio.

Dim. (del teo.): (1) ok.
(2) Sia $p\in X$, consideriamo $0\to\mathcal{O}_X(D-p)\to\mathcal{O}_X(D)\to\mathbb{C}_p\to 0$.
$deg\,D\geq 2g\Rightarrow deg(D-p)=2g-1\Rightarrow h^1(D-p)=h^1(D)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow 0\to H^0(D-p)\to H^0(D)\to \underset{\mathbb{C}}{\overset{\cong}{H^0(\mathbb{C}_p)}}\to 0\Rightarrow$
$\Rightarrow h^0(D-p)=h^0(D)-1$.
(3) Come (2). □

Caso del divisore canonico

X sdR di genere g.
$g=0\Rightarrow K_X=-2p\Rightarrow deg\,K_X=-2,\ h^0(K_X)=0$.
$g=1\Rightarrow K_X=0\Rightarrow deg\,K_X=0,\ h^0(K_X)=1$.
$g\geq 2$, $deg\,K_X=2g-2$.
Vogliamo studiare $\varphi_{|K_X|}$.
$|K_X|$ ha pti base?

Parentesi: divisori di grado basso

Prop.: X sdR di genere g, D divisore effettivo di grado 1.
Allora: $g\geq 1\Leftrightarrow h^0(D)=1$; $g=0\Leftrightarrow h^0(D)=2$.

Dim.: D effettivo $\Rightarrow h^0(D)\geq 1$. Se $h^0(D)=2$, allora $|D|$ è sistema lineare di dim. proiettiva 1, $deg\,D=1\Rightarrow|D|$ è senza pti base.
Pertanto $\varphi_{|D|}:X\to\mathbb{P}^1$ è morfismo di grado $1\Rightarrow$ isomorfismo.
Altrimenti $h^0(D)\leq 1+1\Rightarrow h^0(D)=1$.
Si conclude con RR. □

Dato K_X, $h^1(K_X)\underset{Serre}{=}h^0(\mathcal{O}_X)=1\underset{RR}{\Rightarrow}h^0(K_X)-1=2g-2+1-g\Rightarrow$
$\Rightarrow h^0(K_X)=g$.

Prop.: $|K_X|$ è senza pti base.

Dim.: sia $p\in X$ e consideriamo $0\to\mathcal{O}_X(K_X-p)\to\mathcal{O}_X(K_X)\to\mathbb{C}_p\to 0\Rightarrow$
$0\to H^0(K_X-p)\to H^0(K_X)\to H^0(\mathbb{C}_p)\to H^1(K_X-p)\to H^1(K_X)\to 0$.
Serre $\Rightarrow h^1(K_X)=1$, $H^1(K_X-p)^*\cong H^0(p)$.
Per la prop., $g\geq 2\Rightarrow h^0(p)=1$, cioè $H^1(K_X-p)\cong H^1(K_X)\cong\mathbb{C}$.
Pertanto si ha $0\to H^0(K_X-p)\to H^0(K_X)\to H^0(\mathbb{C}_p)\to 0$,
quindi p non è pto base. □