Def.: X sdR cpt conn. si dice IPERELLITTICA se $\exists\, \varphi : X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ morfismo olo..
Equivalentemente, $\exists\, D$ divisore t.c. $\deg D = 2$, $h^0(D) = 2$ ($\varphi = \varphi_{|D|}$). Tale φ si indica come g^1_2.

In generale, $g^r_d \longleftrightarrow |D|$ t.c. la dim. proiettiva di $|D|$ è r e $\deg D = d$.
$\varphi = \varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^1$, per $T \in \mathbb{P}^1$ generico $\varphi_{|D|}^{-1}(T) = \{p_1, p_2\}$.
Hurwitz $\Rightarrow \exists\ 2g+2$ pti di ramificazione ($z \mapsto z^2$); questi pti si chiamano pti di Weierstrass.

Oss.: se $g = 2$ allora $\deg K_X = 2g-2$, $h^0(K_X) = g = 2 \Rightarrow X$ iperellittica.

Fatto: $g \geq 3 \Rightarrow$ la sdR "generica" non è iperellittica.

Prop.: X iperellittica $\Rightarrow$ la g^1_2 è unica (cioè $|D|$ è unico). [$g(X) \geq 2$]

Dim.: PA $\exists\, D, D'$ t.c. $\deg D = \deg D' = 2$, $h^0(D) = h^0(D') = 2$, $|D| \neq |D'|$.
Allora possiamo scegliere $E \in |D|$, $E' \in |D'|$ t.c. E, E' passano per lo stesso pto p, poiché $h^0(D) = h^0(D') = 2$ e il passaggio per p impone una condizione lineare.
Cioè $|D| \ni E = p + r$, $|D'| \ni E' = p + q$. Allora consideriamo $D_1 = p + q + r$. $h^0(D_1) = 3$, infatti $0 \to H^0(D) \to H^0(D_1) \xrightarrow{val_q} \mathbb{C}_q \to 0$, val_q è suri. perché $|D| \neq |D'|$: se fosse $val_q \equiv 0$ allora q sarebbe pto base, $H^0(p+r) \cong H^0(p+q+r)$ e analogamente $H^0(p+q) \cong H^0(p+q+r) \Rightarrow h^0(D_1) = h^0(D) = h^0(D') = 2$, assurdo perché $\deg(D_1 - q - r) = 1$, $g \geq 2$.
Quindi $h^0(D_1) = 3$, $\deg D_1 = 3$ e, per quanto visto precedentemente, $\forall s, t$ $h^0(D_1 - s - t) = h^0(D_1) - 2$, cioè D_1 è molto ampio.
$\varphi_{|D_1|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$, $\deg \varphi_{|D_1|}(X) = \deg D_1 = 3$, formula del genere $\Rightarrow$
$\Rightarrow g(X) = g(\varphi_{|D|}(X)) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, assurdo perché $g \geq 2$. $\square$

Teo.: $g \geq 2$, X sdR cpt conn., K_X divisore canonico. Allora K_X è molto ampio $\Leftrightarrow X$ non è iperellitica.

Dim.: visto: $|K_X|$ è senza pti base. Sia $\Delta = p + q$ o $= 2p$,
$\mathcal{O}_\Delta = \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_q$ o $= \mathbb{C}[[z]]/(z^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{O}_X(K_X - \Delta) \to \mathcal{O}_X(K_X) \to \mathcal{O}_\Delta \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \to H^0(K_X - \Delta) \to H^0(K_X) \to H^0(\mathcal{O}_\Delta) \to H^1(K_X - \Delta) \to \underset{\mathbb{C}}{\overset{}{H^1(K_X)}} \to 0$.
Serre $\Rightarrow H^1(K_X)^* \cong H^0(\mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$. K_X è molto ampio $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \Delta$ $H^0(K_X) \to H^0(\mathcal{O}_\Delta)$ è suri $\Leftrightarrow H^1(K_X - \Delta) \cong H^1(K_X) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \Delta$ $H^1(K_X - \Delta) \cong \mathbb{C}$. Serre $\Rightarrow H^1(K_X - \Delta)^* \cong H^0(\Delta)$, quindi K_X molto ampio $\Leftrightarrow \nexists\, \Delta$ t.c. $h^0(\Delta) = 2$, $\deg \Delta = 2$. $\square$

Lemma: $g = 0$, $\deg D = d$; allora $\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^d$ corrisponde all'immersione di Veronese $\nu_{1,d} : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^d$.

Dim.: visto: $H^0(D) \cong \{$pol. omogenei di grado $\leq d\}$.
$\varphi_{|D|} \longleftrightarrow \nu_{1,d} : [x_0 : x_1] \longmapsto [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \ldots : x_0 x_1^{d-1} : x_1^d]$.
⌜Si usa anche il lemma $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n) : X \to \mathbb{P}^n$ morfismo $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ posso eliminare i denominatori.⌟ $\square$

Teo.: $g \geq 2$, X sdR cpt conn.. Allora X è iperell. $\Leftrightarrow \varphi_{|K_X|} : X \to \mathbb{P}^{g-1}$ si fattorizza come $\nu_{1,g-1} \circ g^1_2$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_{|K_X|}"] \arrow[dr, "g^1_2"'] & \mathbb{P}^{g-1} \\ & \mathbb{P}^1 \arrow[u, "\nu_{1,g-1}"'] \end{tikzcd}$$

Dim.: ($\Leftarrow$) ovvia: $\exists\, g^1_2$.
($\Rightarrow$) $\varphi_{|K_X|} : X \to \mathbb{P}^{g-1}$ è un morfismo di grado ≥ 2 sull'immagine poiché per ipotesi $\varphi_{|K_X|}(p) = \varphi_{|K_X|}(q)$ $\forall p, q$ t.c. $h^0(p+q) = 2$.
$\deg K_X = 2g - 2 = \deg(\varphi_{|K_X|}) \cdot \deg(\varphi_{|K_X|}(X)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \deg(\varphi_{|K_X|}(X)) \leq g - 1$. Tesi: $\deg(\varphi_{|K_X|}(X)) = g - 1$ e $\varphi_{|K_X|}(X) \cong \nu_{1,g-1}(\mathbb{P}^1)$.
Sia $\pi : Y \to \varphi_{|K_X|}(X)$ eventuale desingolarizzazione, H divisore iperpiano di $\mathbb{P}^{g-1}$. $\pi^*(H)$ su Y verifica $\deg_Y(\pi^*(H)) \leq g - 1$, $\dim_Y |\pi^*(H)| \geq g - 1$ poiché $\pi : Y \to \varphi(X) \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$.
Ma allora $h^0(\pi^*(H)) \geq g$, $\deg(\pi^*(H)) \leq g - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow Y \cong \mathbb{P}^1$ e $\pi = \nu_{1,g-1}$ per il lemma $h^0(D) \leq \deg(D) + 1$ e ex.
$\Leftarrow$ $Y \cong \mathbb{P}^1$. ↳ dimensioni + unicità (a meno di iso.)
Formula del grado: $\deg(X \to \varphi(X)) = 2$ e $\varphi(X) \cong \mathbb{P}^1$, (si usa anche che $\deg \varphi(X) = \deg(\pi^*(H))$)
quindi $\exists\, g^1_2$. Per unicità di g^1_2 e di $\nu_{1,g-1}$, $\varphi_{|K_X|} = \nu_{1,g-1} \circ g^1_2$. $\square$

Immersioni proiettive

Teo.: X sdR cpt conn. di genere g, D divisore di grado $d \geq 2g+1$.
Allora $X \cong \varphi_{|D|}(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ curva algebrica di grado d, dove $N = h^0(D) - 1 \overset{RR}{=} d - g$.

Oss.: in generale (teo. di Chow): X var. comp., D divisore molto ampio $\Rightarrow$
$\Rightarrow X \cong \varphi_{|D|}(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ varietà algebrica.
Nel nostro caso, ogni sdR è isomorfa a una curva algebrica.
Se la dim. comp. è ≥ 2, $\exists$ var. comp. che non sono algebriche.

Proiezioni

Prop.: sia $Z \subseteq \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$ una curva algebrica. Allora $\exists\, \pi : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^{N-1}$ proiezione da un pto O a un iperpiano t.c. $Z \cong \pi(Z)$.

Dim. (della prop.): la varietà delle secanti di X è $\mathrm{Sec}(Z) =$
$= \overline{\{\langle p, q \rangle \mid p, q \in Z\}} \subseteq \mathbb{P}^N$. $\exists$ morfismo $\phi : \mathbb{P}^1 \times (Z \times Z \setminus \Delta_Z) \to \mathbb{P}^N$, $([\lambda_0 : \lambda_1], (p, q)) \longmapsto \lambda_0 p + \lambda_1 q$ e $\mathrm{Sec}(Z) = \overline{\mathrm{Im}(\phi(Z))}$.
In particolare, $\dim \mathrm{Sec}(Z) \leq 1 + 2 \dim Z = 3$. ($Z$ curva)
$N \geq 4 \Rightarrow \exists\, O \in \mathbb{P}^N \setminus \mathrm{Sec}(Z) \Rightarrow \pi$ ini.. Per l'iso. locale: consideriamo $\mathrm{Tan}(Z) =$ varietà delle tangenti $=$
$= \{p + tv \mid p \in Z, v$ vettore tangente$\}$.
$\exists\, \varphi : \mathbb{C} \times Z \to \mathrm{Tan}(Z)$, $(t, p) \longmapsto p + tv$ dove $T_{p,Z} = \langle v \rangle$ fissato.
$\dim \mathrm{Tan}(Z) \leq 2$ se Z curva algebrica.
Conseguenza: se prendo $O \notin \mathrm{Sec}(Z) \cup \mathrm{Tan}(Z)$ allora $\pi_{|Z}$ è un isomorfismo con l'immagine. $\square$