Teo.: X sdR di genere g, D divisore di grado $d \geq 2g+1$. Allora $\varphi_{|D|}(X) \subseteq \mathbb{P}^N$, $N = d-g$ è una curva algebrica.

Dim.: dato D consideriamo $R(D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(nD)$. $R(D)$ è un'algebra graduata, $R(D)_n := H^0(nD)$ e il prodotto è

$$H^0(nD) \otimes H^0(mD) \longrightarrow H^0((n+m)D).$$
$$s \otimes t \longmapsto s \cdot t$$

Teo. (Castelnuovo-Mumford): $\deg D \geq 2g+1 \Rightarrow R(D)$ è generato in grado 1.

Cioè $\forall n$ $H^0(D)^{\otimes n} \twoheadrightarrow H^0(nD)$.

D'altra parte, per costruzione $H^0(D)^{\otimes n} \twoheadrightarrow H^0(nD) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathrm{Sym}^n(H^0(D)) \twoheadrightarrow H^0(nD)$, cioè è surj. sui tensori sym. (perché il prodotto è commutativo).

$\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(H^0(D)^*)$ con. coord. $x_0, \dots, x_N \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Sym}^n(H^0(D)) \cong \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_n$ poiché $H^0(D) \cong \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_1$.

$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_n \twoheadrightarrow H^0(nD)$ $\forall n \geq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ $\alpha : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N] \twoheadrightarrow R(D)$.

Poniamo $I = \ker \alpha$, $Z = V(I)$.

$Z = \{p \in \mathbb{P}^N \mid g(p) = 0 \ \forall g \in I\}$. Per costruzione $\varphi_{|D|}(X) \subseteq Z$ e $R(D) = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]/I$. Tesi: $\varphi_{|D|}(X) = Z$.

$R(D)$ è senza divisori dello zero (poiché X è irr.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow I$ è ideale primo $\Rightarrow Z = V(I)$ irr. (e chiuso).

X irr. $\Rightarrow \varphi_{|D|}(X)$ irr. e chiuso. Il teorema segue se dimostriamo $\dim_{\mathbb{C}} Z = 1$. Strumento: polinomio di Hilbert.

Dato $R(D) = \bigoplus_{n \geq 0} R(D)_n = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]/I$, il pol. di H. è $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ t.c. $\forall n \gg 0$ $p(n) = \dim (R(D)_n)$.

Fatti: 1) $p(t)$ esiste;

2) $\deg p = \dim_{\mathbb{C}} V(I)$, $I = \ker(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N] \to R(D))$.

Nel nostro caso $R(D)_n = H^0(nD)$.

RR $\Rightarrow \dim(R(D)_n) = h^0(nD) = n \cdot \deg + 1 - g$ poiché $h^1(nD) = 0$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow \deg p = 1 \Rightarrow \dim Z = 1$. $\square$

Cor.: X sdR cpt $\Rightarrow X$ è isomorfa a una curva algebrica in $\mathbb{P}^3$.

Viceversa, data $Z \subseteq \mathbb{P}^3$ curva algebrica liscia allora Z ha una struttura di sdR (funzione implicita).

Conclusione: esiste un'equivalenza di categorie

$\{$sdR cpt$\} \longleftrightarrow \{$curve algebriche proiettive lisce$\}$

$\{$campi $\mathbb{C}(x)$ di grado di trascendenza 1 su $\mathbb{C}\}$.

$X \longmapsto \mathcal{M}(X)$

$X \cong Z \subseteq \mathbb{P}^N \Rightarrow \mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(Z) \cong \mathbb{C}(Z) =$ campo delle funzioni razionali.