DIVISORI DI GRADO BASSO II: TEOREMA DI CLIFFORD

X sdR cpt conn., D divisore su X.

Problema: stima di $h^0(D)$ rispetto a $\deg D$.

Lemma: D divisore su X sdR cpt conn.. Allora
$\dim|D| \geq k \Leftrightarrow \forall \{p_1, \dots, p_k \mid p_j \in X\}\ \exists D' \in |D|$ t.c. $D' \supseteq \{p_1, \dots, p_k\}$.

Dim.: $(\Leftarrow)$ induzione su k. $k=0 \Leftrightarrow \dim|D| \geq 0 \Leftrightarrow |D| \neq \varnothing$.
$k \Rightarrow k+1$: supponiamo che $\forall$ $(k+1)$-upla $\{p_1, \dots, p_{k+1}\}$ $\exists$ $D' \in |D|$ t.c. $D' \supseteq \{p_1, \dots, p_{k+1}\}$. Scegliamo $p_{k+1} \notin$ luogo base di $|D|$ e poniamo $D_1 = D - p_{k+1}$. D_1 verifica l'ipotesi per $k \underset{\text{ipotesi induttiva}}{\Longrightarrow} \dim|D_1| \geq k$. Considero
$$0 \to H^0(D_1) \to H^0(D) \to \mathbb{C}_{p_{k+1}}.$$
p_{k+1} non è punto base $\Rightarrow h^0(D) = h^0(D_1) + 1$.
$(\Rightarrow)$ Sia $|D|$ t.c. $\dim|D| \geq k$. Consideriamo $p_1, \dots, p_{k-1}, p_k \in X$.
Se p_k è pto base per D allora $\forall D' \in |D|$ $p_k \in D'$.
$|D - p_k| \cong |D|$, induzione $\Rightarrow \exists D_1' \in |D - p_k|$ t.c. $D_1' \supseteq \{p_1, \dots, p_{k-1}\} \Rightarrow D_1 + p_k \supseteq \{p_1, \dots, p_k\}$.
Se p_k non è pto base, allora $\dim|D - p_k| = \dim|D| - 1$ e induzione come prima. $\square$

Prop.: sia X sdR cpt conn.. Siano D_1, D_2 divisori su X. Allora
$\dim|D_1| + \dim|D_2| \leq \dim|D_1 + D_2|$.

Dim.: $d_j = \dim|D_j|$, $j=1,2$. Consideriamo $\{p_1, \dots, p_{d_1}\} \cup \{q_1, \dots, q_{d_2}\} \subseteq X$.
Lemma $\Rightarrow \exists D_j' \in |D_j|$, $j=1,2$ t.c. $D_1' \supseteq \{p_1, \dots, p_{d_1}\}$, $D_2' \supseteq \{q_1, \dots, q_{d_2}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \underset{\substack{\cap \\ |D_1+D_2|}}{D_1' + D_2'} \supseteq \{p_1, \dots, p_{d_1}\} \cup \{q_1, \dots, q_{d_2}\} \underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \dim|D_1 + D_2| \geq d_1 + d_2$. $\square$

La prop. è equiv. a: $\mu: H^0(D_1) \otimes H^0(D_2) \to H^0(D_1 + D_2)$, $s \otimes t \mapsto s \cdot t$,
$\dim \operatorname{Im} \mu \leq h^0(D_1) + h^0(D_2) - 1$. Idea: fissiamo $s_0 \in H^0(D_1)$, $t_0 \in H^0(D_2)$,
$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cdot s_0} \mathcal{O}_X(D_1) \to \mathcal{O}_{D_1} \to 0, \quad 0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cdot t_0} \mathcal{O}_X(D_2) \to \mathcal{O}_{D_2} \to 0.$$
Allora $\{s_0 \otimes t \mid t \in H^0(D_2)\} \hookrightarrow H^0(D_1 + D_2)$ e viceversa.
L'intersezione delle immagini è $s_0 \otimes t_0$. Ipotesi fondamentale: X irr..

Teorema di Clifford

Sia X sdR cpt conn., D divisore t.c. $\deg D \leq 2g-2$. Allora:
1) $\dim|D| \leq \frac{1}{2} \deg D$; 2) vale l'$=$ $\Leftrightarrow D = 0, K_X$ o X è iperellittica e $D = r \cdot g_2^1$, cioè se $g_2^1 \leftrightarrow |D_1|$ allora $D \equiv r D_1$.

Dim.: se $h^0(D) = 0$ ok $\rightsquigarrow$ WLOG $h^0(D) \neq 0$.
Se $h^1(D) = 0$ allora per RR $h^0(D) = \deg D - g + 1 \leq \frac{1}{2} \deg D$.
Se $h^1(D) \neq 0$ allora per Serre $h^0(K_X - D) \neq 0$, cioè $|D| \neq \varnothing$, $|K_X - D| \neq \varnothing$. Consideriamo l'inclusione $|D| + |K_X - D| \hookrightarrow |K_X|$.
Prop. $\Rightarrow g - 1 = \dim|K_X| \geq \dim|D| + \dim|K_X - D|$ (A).
RR: $\dim|D| - \dim|K_X - D| = \deg D - g + 1$ (B).
(A) + (B) $\Rightarrow$ tesi del punto 1).

2) $(\Leftarrow)$ $D = 0, K_X$: il teo. segue da RR + Serre.
Se X è iperellittica allora $g_2^1 = |D_1|$ t.c. $\deg D_1 = 2$, $\dim|D_1| = 1$.
Se $D \sim r D_1$ allora $\deg D = 2r$ e $\dim|D| = r$, poiché se $D_1 = p_1 + p_2$ sia $0 \to H^0((r-1)D_1) \to H^0(rD_1) \xrightarrow{v} H^0(\mathbb{C}_{p_1} \oplus \mathbb{C}_{p_2})$ e $\operatorname{rk} v = 1$ perché g_2^1 identifica $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$.
$(\Rightarrow)$ Supponiamo che $\exists$ D divisore t.c. $\dim|D| = \frac{1}{2} \deg D$, $D \neq 0, K_X$. Induzione su $\deg D$: se $\deg D = 2$ è la def. di X iperell.. $\deg D \geq 4$: RR $\Rightarrow H^1(D) \neq 0 \overset{\text{Serre}}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow H^0(K_X - D) \neq 0 \Rightarrow \exists E \in |K_X - D|$. Scegliamo due pti $p \in \operatorname{Supp} E \not\ni q$. $\dim|D| = \frac{1}{2} \deg D \geq 2 \overset{\text{lemma}}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow \exists \bar{D} \in |D|$ t.c. $\bar{D} \geq \{p, q\}$. Poniamo $D' = \bar{D} \cap E$ come divisore, cioè $D' = \sum_{R \in X} \min(\operatorname{ord}_R \bar{D}, \operatorname{ord}_R E) \cdot R$.
Per costruzione, $D' \subsetneq \bar{D}$, $D' \subseteq E$. Costruiamo una succ. esatta di Mayer-Vietoris:
$$0 \to \mathcal{O}_X(D') \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_X(\bar{D}) \oplus \mathcal{O}_X(E) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X(E + \bar{D} - D') \to 0,$$
dove $\psi = (\iota_1, \iota_2)$, $\iota_1: \mathcal{O}_X(D') \to \mathcal{O}_X(\bar{D})$, $\iota_2: \mathcal{O}_X(D') \to \mathcal{O}_X(E)$, $\varphi = \pi_1 - \pi_2$, $\pi_1: \mathcal{O}_X(\bar{D}) \to \mathcal{O}_X(E + \bar{D} - D')$, $\pi_2: \mathcal{O}_X(E) \to \mathcal{O}_X(E + \bar{D} - D')$. Quindi
$h^0(\mathcal{O}_X(\bar{D}) \oplus \mathcal{O}_X(E)) = h^0(\bar{D}) + h^0(E) \leq h^0(D') + h^0(\bar{D} + E - D')$.
Ma $\bar{D} \sim D$, $E \sim K_X - D \Rightarrow \bar{D} + E - D' \sim K_X - D'$. Pertanto,
$h^0(D) + h^0(K_X - D) \leq h^0(D') + h^0(K_X - D') \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dim|D| + \dim|K_X - D| \overset{*}{\leq} \dim|D'| + \dim|K_X - D'|$.
Per ipotesi, $\frac{1}{2} \deg D = \dim|D| \overset{RR}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \deg(K_X - D) = \dim|K_X - D| \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim|D| + \dim|K_X - D| = g - 1$. Per la prop.,
$\dim|D'| + \dim|K_X - D'| \leq \dim|K_X| = g - 1$. Per $*$, anche $\dim|D'| + \dim|K_X - D'| = g - 1$, per cui $\dim|D'| = \frac{1}{2} \deg D'$.
Poiché $\deg D' < \deg D$, X è iperell. e $D' \sim s \cdot D_1$ con $|D_1| \leftrightarrow g_2^1$, $s = \frac{1}{2} \deg D_1$. Consideriamo
$\underset{\substack{\cap \\ |D + (g-1-r) \cdot D_1|}}{|D| + |(g-1-r) \cdot D_1|}$ con $r = \dim|D|$. Tesi: $D \sim r \cdot D_1$.
Per la prima parte, $\dim|(g-1-r) \cdot D_1| = g - 1 - r \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim|D| + \dim|(g-1-r) \cdot D_1| = r + g - 1 - r = g - 1$ e
$\deg(D + (g-1-r) \cdot D_1) = 2r + 2(g-1-r) = 2g - 2$.
Conclusione: $D + (g-1-r) \cdot D_1$ è un div. di grado $2g-2$ e $h^0 = g$, pertanto $D + (g-1-r) \cdot D_1 \sim K_X$ poiché K_X è l'unico divisore di grado $2g-2$ e $h^0 = g$.
X iperell. $\Rightarrow K_X \sim (g-1) \cdot D_1 \Rightarrow D \sim K_X - (g-1-r) \cdot D_1 \sim r \cdot D_1$. $\square$