Forma geometrica di Riemann-Roch

X sdR cpt conn. non iperell., $\varphi_{|K_X|}: X \to \mathbb{P}^{g-1}$, identifichiamo X con la sua immagine.

Dato un divisore $D = p_1 + \ldots + p_d$, posso pensare $\{p_1, \ldots, p_d\}$ come insieme di punti in $\mathbb{P}^{g-1}$.

Teo. (RR geometrico): X non iperell., $\varphi_{|K_X|}: X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$. Dato $D = p_1 + \ldots + p_d$ allora $\dim |D| = \deg D - 1 - \dim \operatorname{span}(D)$.
↳ span in $\mathbb{P}^{g-1}$

Dim.: $0 \to \mathcal{O}_X(K_X - D) \to \mathcal{O}_X(K_X) \to \mathcal{O}_D \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \to H^0(K_X - D) \to H^0(K_X) \to \underset{\mathbb{C}^d}{\overset{}{H^0(\mathcal{O}_D)}}$.

$\mathbb{P}(H^0(K_X)) = \{\text{iperpiani in } \mathbb{P}^{g-1}\}$,

$\mathbb{P}(H^0(K_X - D)) = \{$ " " " che si annullano in $D\} =$

$= \{$ " " " " " " $\operatorname{span} D\}$.

$\dim \operatorname{span}(D) + \dim \operatorname{Ann}(\operatorname{span}(D)) \overset{\text{dim. proiettive}}{=} g - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^1(D) = h^0(K_X - D) = g - 1 - \dim \operatorname{span}(D)$. $\square$

Jacobiana associata a una sdR

$\operatorname{Div}(X) = \{\text{divisori su } X\}$, $\operatorname{Pic}(X) = \{\text{fasci invertibili su } X\}$.

Visto: $\exists$ mappa $\operatorname{Div}(X)/\sim \;\longrightarrow \operatorname{Pic}(X)$.
$D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$

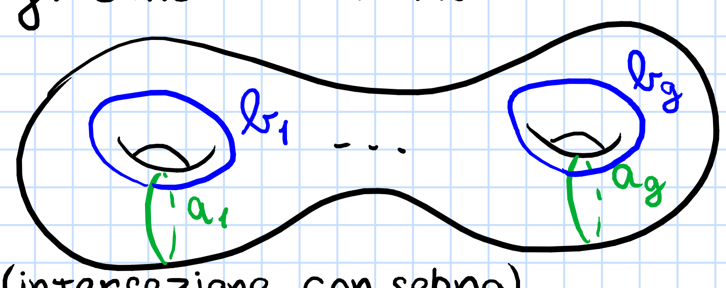
Struttura di Pic: $\operatorname{Pic}(X) = \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}} \underbrace{\operatorname{Pic}^d(X)}_{\{\text{fasci invertibili di grado } d\}}$

(il grado può essere definito mediante RR: $\mathcal{F}$ fascio invertibile $\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow d = \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O}_X)$).

Nota: $\forall d$ $\exists$ isomorfismo $\operatorname{Pic}^d(X) \to \operatorname{Pic}^0(X)$ con p_0 pto fissato.
$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-d\,p_0)$

Jacobiana associata a X

X sdR cpt conn. di genere g. Consideriamo una BASE SIMPLETTICA di $H_1(X; \mathbb{Z})$: $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ è una base di $H_1(X; \mathbb{Z})$ t.c.



$a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$, $a_i \cdot a_j = 0$ $\forall i, j$ (intersezione con segno).

Vogliamo integrare le 1-forme olo. lungo i cammini 1-dim..

$\underset{\overset{\shortparallel}{H^0(K_X)}}{\Omega^1(X)} = \{\text{1-forme diff. olo. globali su } X\}$.

Mappa dei periodi

Periodo di X := funzionale $\Omega^1(X) \to \mathbb{C}$, dove $[c] \in H_1(X; \mathbb{Z})$.
$\omega \longmapsto \int_{[c]} \omega$

Fissiamo una base $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ di $\Omega^1(X)$ e una base simplettica $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ di $H_1(X; \mathbb{Z})$. La MATRICE DEI PERIODI è

$$(A|B) = \Big(\underbrace{\begin{matrix} \int_{a_1} \omega_1 & \cdots & \int_{a_g} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_1} \omega_g & \cdots & \int_{a_g} \omega_g \end{matrix}}_{A} \Big| \underbrace{\begin{matrix} \int_{b_1} \omega_1 & \cdots & \int_{b_g} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{b_1} \omega_g & \cdots & \int_{b_g} \omega_g \end{matrix}}_{B} \Big).$$

Lemma: 1) A, B sono invertibili;
2) i vettori colonna di $(A|B)$ sono $\mathbb{R}$-linearmente indi. in $\mathbb{C}^g$;
3) (relazioni di Riemann) $A^T B = B^T A$.

Dim.: no. $\square$

Poniamo Λ = reticolo generato dalle colonne di $(A|B)$.

Def.: la JACOBIANA di X è $\operatorname{Jac}(X) := \Omega^1(X)^* / L(\Lambda) \cong \mathbb{C}^g / \Lambda$, toro complesso di dim. g.

$$L(\Lambda) = \operatorname{Im} \left\{ \begin{matrix} H_1(X; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega^1(X)^* \\ [c] & \longmapsto & \int_{[c]} \end{matrix} \right\}.$$

Mappa di Abel-Jacobi

Fissiamo $p_0 \in X$. $A_{p_0}: X \to \operatorname{Jac}(X)$.

$$p \longmapsto \begin{pmatrix} \int_{p_0}^{p} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{p_0}^{p} \omega_g \end{pmatrix} \bmod \Lambda$$

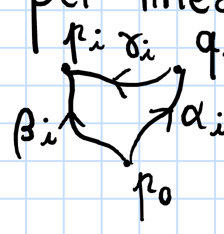
È ben def. perché, vista modulo Λ, e si usa Stokes.

Oss.: A_{p_0} si estende per linearità a $\operatorname{Div}(X)$:
$\sum n_i p_i \mapsto \sum n_i A_{p_0}(p_i)$.

Restringiamo la nostra attenzione a $\operatorname{Div}^0(X) = \{\text{divisori di grado } 0\}$.

Prop.: $A_{p_0}: \operatorname{Div}^0(X) \to \operatorname{Jac}(X)$ è indi. dalla scelta di p_0.

Dim.: per linearità è sufficiente considerare il caso $D = \sum_i p_i - q_i$.



Poniamo $\eta_i = \alpha_i + \gamma_i - \beta_i$; è un cammino chiuso $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \int_{\eta_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\eta_i} \omega_g \end{pmatrix} \in \Lambda.$$

Allora
$$A_{p_0}(p_i - q_i) = \begin{pmatrix} \int_{\beta_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\beta_i} \omega_g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_{\alpha_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\alpha_i} \omega_g \end{pmatrix} \overset{\bmod \Lambda}{=} \begin{pmatrix} \int_{\gamma_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_i} \omega_g \end{pmatrix}. \quad \square$$

Mappa di Abel-Jacobi in grado > 0

$D = \sum_{i=1}^{d} p_i$, $A_d: \operatorname{Div}^d(X) \to \operatorname{Jac}(X)$, p_0 fissato.
$D \longmapsto A_0(D - d\,p_0)$

$\exists$ diagramma commutativo

tutti i coeff. ≥ 0 $\leftarrow$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Div}^d_+(X) \arrow[r, "A_d"] \arrow[d, "\tau"] & \operatorname{Jac}(X) \arrow[d, equal] \\ \operatorname{Div}^0(X) \arrow[r, "A_0"] & \operatorname{Jac}(X) \end{tikzcd}$$

$\tau(D) = D - d\,p_0$.