Fascio invertibile $\mathcal{L} \longleftrightarrow \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ olo. + cociclo in $U_\alpha\cap U_\beta$ $\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta} = g_{\alpha\beta} \in H^0(U_\alpha\cap U_\beta, \mathcal{O}^*)$

$\mathcal{L}$ definisce un divisore D, $D_{|U_\alpha} = \sum_p \mathrm{ord}_p(\varphi_\alpha)\cdot p$. Condizione di cociclo $\Rightarrow$ D è ben def. su X.

Più in generale: $\mathrm{CaDiv}(X) = \{\text{divisori di Cartier}\} := H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$.

Prop.: X sdR cpt conn. (in particolare liscia) $\Rightarrow \mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{CaDiv}(X)$.

Dim.: $\sigma\in H^0(X,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \rightsquigarrow \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ mero.
ponendo $D_{|U_\alpha} = \mathrm{div}(\varphi_\alpha) = \sum_p \mathrm{ord}_p(\varphi_\alpha)\cdot p$.
Modulo $\mathcal{O}^* \Rightarrow$ in $U_\alpha\cap U_\beta$ $\varphi_\alpha/\varphi_\beta \in \mathcal{O}^*$.
Viceversa, dato $D = \sum n_p\cdot p$ consideriamo un ric. aperto t.c. $D_{|U_\alpha} = \mathrm{div}(\varphi_\alpha)$. $\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha\cap U_\beta)$ per costruzione. □

Prop.: $\mathrm{Pic}(X) = \{\mathcal{L} \text{ fascio invertibile}\}/\text{iso.} \cong H^1(X,\mathcal{O}^*)$.

Dim.: scegliamo ric. $\{U_\alpha\}$ t.c. $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ banalizzazione e in $U_\alpha\cap U_\beta$ $g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha/\varphi_\beta \in H^0(U_\alpha\cap U_\beta,\mathcal{O}^*)$. I $g_{\alpha\beta}$ definiscono un elemento in $H^1(X,\mathcal{O}^*)$. Abbiamo una mappa $\Psi: \{\mathcal{L} \text{ inv.}\} \to H^1(X,\mathcal{O}^*)$. Voglio $\Psi(\mathcal{L}) = \Psi(M) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{L}\cong M$. $\mathcal{L} \longleftrightarrow \begin{cases}\varphi_\alpha \\ g_{\alpha\beta}\end{cases}$, $M \longleftrightarrow \begin{cases}\eta_\alpha \\ h_{\alpha\beta}\end{cases}$.

$\mathcal{L}\cong M \Leftrightarrow \mathcal{L}\otimes M^{-1} \cong \mathcal{O} \Leftrightarrow \sigma_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\eta_\alpha} \in H^0(U_\alpha,\mathcal{O})$ e
$\frac{g_{\alpha\beta}}{h_{\alpha\beta}}\cdot\sigma_\alpha = \sigma_\beta, \in C^0(U_\alpha,\mathcal{O}^*)$, cioè 0 in H^1.

Ψ suri.: dato $g_{\alpha\beta}\in H^1(X,\mathcal{O}^*)$ prendiamo $\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}$ t.c. $\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}\varphi_\beta$. Consideriamo

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \to \underset{\mathbb{C}^*}{\underset{\|}{H^0(\mathcal{O}^*)}} \to H^0(\mathcal{M}^*) \to \underset{H^0(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)}{\underset{\|}{\mathrm{Div}(X)}} \to \underset{H^1(\mathcal{O}^*)}{\underset{\|}{\mathrm{Pic}(X)}} \to \underset{0}{\underset{\| \to \text{fatto}}{H^1(\mathcal{M}^*)}}.$$

Allora $\mathrm{Div}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}(X)$. □

Prop.: $p: \mathrm{Div}(X)/\sim \; \to \mathrm{Pic}(X)$ è iso..

Dim.: visto: $D \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(D)$ fascio inv.. La tesi è equiv. a dire $p(D)\cong\mathcal{O}_X \Leftrightarrow D = \mathrm{div}\, f$, f mero. globale.
$D = \mathrm{div}\, f \Leftrightarrow \mathcal{O}_X(D)$ è generato da f^{-1}, quindi $1 \mapsto f^{-1}$ induce iso. globale $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X(D)$. □

Teo. (Abel): $A_0(D) = 0 \Leftrightarrow D = \mathrm{div}\, f$.

Teo. (di inversione di Jacobi): $\forall \lambda\in\mathrm{Jac}(X)$, fissato $p_0\in X$, $\exists\, p_1,\dots,p_g\in X$ t.c. $A_0(\sum(p_i - p_0)) = \lambda$. Inoltre, per λ generico $D = \sum_{i=1}^g p_i$ è unico.

Cor.: $\mathrm{Pic}^0(X) \cong \mathrm{Div}^0(X)/\sim \; \cong \mathrm{Jac}(X)$.

Cor.: sia X sdR cpt conn. di genere $g\geq 1$. Allora, fissato p_0,
$A_1 : X \to \mathrm{Jac}(X)$ è ini..
$p \mapsto A_0(p - p_0)$

Dim. (del secondo cor.): PA $\exists\, p,q\in X$, $p\neq q$ t.c. $A_1(p) = A_1(q) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_0(p-q) = 0$. Abel $\Rightarrow p - q = \mathrm{div}\, f$, f mero. non cost. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ induce $\hat{f}: X \to \mathbb{P}^1$ olo. di grado $1 \Rightarrow X \cong \mathbb{P}^1$, assurdo. □

Cor.: X sdR cpt conn.. $g(X) = 1 \Rightarrow X \cong \mathrm{Jac}(X)$.

Dato $\lambda\in\mathrm{Jac}(X)$, $\lambda = A_d(D)$, $A_d^{-1}(\lambda) \underset{\text{Abel}}{=} \{D'\geq 0 \mid D'\sim D\} = |D|$.

Cor.: sia λ generico in $\mathrm{Jac}(X)$, sia $D\in\mathrm{Div}_+^g(X)$ l'unico divisore t.c. $A_g(D) = \lambda$. Allora $h^1(D) = 0$.

Dim. (del quarto cor.): D unico $\Leftrightarrow h^0(D) = 1$. RR $\Rightarrow$ tesi. □

Cor.: $H^1(X,\mathcal{M}) = 0$.

Dim. (del quinto cor.): sia $D\geq 0$ divisore. $\exists$ succ. esatta

$$0 \to H^0(D) \to H^0(\mathcal{M}) \to H^0(T(D)) \to \underset{0}{\underset{\| \to D \text{ generico di grado } g}{H^1(D)}} \to H^1(\mathcal{M}) \to 0.$$ □