Dim. (di inversione di Jacobi): consideriamo $X^{(g)}$ il g-prodotto simmetrico di X, cioè $X^{(g)}: \underbrace{X\times\dots\times X}_{g}/\sigma_g$.

$\mathrm{Div}^g_+(X) \xrightarrow{\cong} X^{(g)}$.

$D = \sum_{i=1}^{h} m_i p_i \longmapsto (\underbrace{p_1,\dots,p_1}_{m_1},\dots,\underbrace{p_h,\dots,p_h}_{m_h})$

Inoltre, $\dim_{\mathbb{C}} = 1 \Rightarrow X^{(g)}$ è varietà liscia di dim. g (segue da $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_g]^{\sigma_g} \cong \mathbb{C}[x_1,\dots,x_g]$).

Definiamo $A^{(g)}: X^{(g)} \to \mathrm{Jac}(X)$.

$$(p_1,\dots,p_g) \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{g} \int_{p_0}^{p_i}\omega_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{g}\int_{p_0}^{p_i}\omega_g \end{pmatrix}$$

Oss.: la mappa dei periodi ha rango $g \Rightarrow$ fissata una base $\{\omega_1,\dots,\omega_g\}$ di $\Omega^1(X) \cong H^0(X,K_X)$, per $p_1,\dots,p_g$ pti generici $\in X$, posto $\omega_i = h_i dz_i$ (z_i coord. loc. in p_i), la matrice $(h_i(p_j))$ ha rango g.

Equivalentemente, $\varphi_{|K_X|}: X \to \mathbb{P}^{g-1}$, $\varphi_{|K_X|}(X)$ è una curva non degenere (cioè non è contenuta in un iperpiano) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, p_1,\dots,p_g \in \varphi_{|K_X|}(X)$ lin. indi..

Con operazioni di riga (cambiando eventualmente base) WLOG $(h_i(p_j)) = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$ triangolare superiore.

In questo modo, $\{z_1,\dots,z_g\}$ coord. loc. in $X^{(g)}$,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} A^{(g)}(p_1,\dots,p_g) = \frac{\partial}{\partial z_i}\begin{pmatrix} \int_{p_0}^{p_i+z_i}\omega_1 \\ \vdots \\ \int_{p_0}^{p_i+z_i}\omega_g \end{pmatrix} \underset{h_i dz_i = \omega_i}{=} \begin{pmatrix} h_1(p_i) \\ \vdots \\ h_g(p_g) \end{pmatrix},$$

quindi il diff. di $A^{(g)}$ ha rango max $\Rightarrow A^{(g)}: X^{(g)} \to \mathrm{Jac}(X)$ è olo. tra var. di dim. g con diff. di rango g $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ iso. locale $\Rightarrow$ suri. (immagine clopen).

Infine, se $A^{(g)}(p_1,\dots,p_g) = \lambda \in \mathrm{Jac}(X)$, posto $D = \sum_{i=1}^{g} p_i$, $(A^{(g)})^{-1}(\lambda) = |D|$, cioè la fibra è uno spazio proiettivo e quindi per λ generico è un pto (essendo $A^{(g)}$ un morfismo tra var. di dim. g. $\square$

Teo. (Castelnuovo-Mumford): X sdR cpt conn. di genere g, D divisore di grado $d \geq 2g+1 \Rightarrow H^0(X,D)^{\otimes m} \twoheadrightarrow H^0(X, mD)$.

Teo. 1: sia E divisore t.c. $\dim|E| \geq 1$ e $|E|$ è bpf. Sia D divisore t.c. $H^1(D-E)=0$. Allora $H^0(D)\otimes H^0(E) \to H^0(D+E)$ è suri..

Dim. (del teo. 1): sia $\Delta = \sum m_i p_i \in E$, $\Delta = (s=0)$,

(1) $0 \to \mathcal{O}(-E) \xrightarrow{s} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$ induce

(2) $0 \to \mathcal{O}(D-E) \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D)\otimes\mathcal{O}_\Delta \to 0$.
$\alpha \longmapsto \alpha\otimes s$ $\quad \overset{\shortparallel\wr}{\mathcal{O}_\Delta} \to \mathcal{O}_\Delta$ fascio grattacielo

Per ipotesi $H^1(D-E)=0$, quindi (2) è esatta sugli H^0:

(3) $0 \to H^0(D-E) \to H^0(D) \to H^0(\mathcal{O}_\Delta) \to 0$;

tensorizziamo (2) con $\mathcal{O}(E)$ e (3) con $H^0(E)$ e otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(D-E)\otimes H^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "m_1"] & H^0(D)\otimes H^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "m_2"] & H^0(\mathcal{O}_\Delta)\otimes H^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "m_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(D) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(D+E) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathcal{O}_\Delta\otimes\mathcal{O}(E)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_3 &
\end{tikzcd},$$

dove $C_i = \mathrm{coker}\, m_i$. Nota: $H^1(D-E)=0 \underset{\text{(3) con gli } H^1}{\Rightarrow} H^1(D)=0$.

$|E|$ bpf $\Rightarrow \forall p \in \mathrm{supp}(\Delta)\ \exists t \in H^0(E)$ t.c. $t(p)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow H^0(\mathcal{O}_\Delta)\otimes H^0(E) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_\Delta)$.
$p\otimes t \longmapsto p\cdot t(p) = p\cdot$ cost. (in p)

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(D)\otimes H^0(E) \arrow[d] \\
H^0(D) \arrow[ur, "\alpha\otimes s"] \arrow[r] & H^0(D+E) \, \alpha\cdot s
\end{tikzcd} \Rightarrow$$

$\Rightarrow H^0(D) \to C_1 \to 0$ (il diagramma commuta). $\square$

Teo. 2 (bpf pencil trick): E come nel teo. 1. Allora $\mathrm{Ker}(H^0(D)\otimes H^0(E) \to H^0(D+E)) \cong H^0(D-E)$.

Dim.: sia $\{s_1,s_2\}$ base di $H^0(E)$. $\mathrm{Ker} \longleftrightarrow \alpha_1\otimes s_1 + \alpha_2\otimes s_2 = 0 \Leftrightarrow$
(del teo. 2) $\Leftrightarrow \alpha_1\otimes s_1 = -\alpha_2\otimes s_2$. Ma s_1, s_2 non hanno zeri comuni $\Rightarrow$
io uso il teo. 1 $\Rightarrow \alpha_1$ si annulla in $\mathrm{div}\, s_2$ e α_2 si annulla in $\mathrm{div}\, s_1$, cioè $\alpha_1 = s_2\otimes\eta$, $\alpha_2 = s_1\otimes\eta$, $\eta\in H^0(D-E)$ e $\{\eta\}\cong \mathrm{Ker}$. $\square$

Dim. (di C.-M.): Ⓐ $H^0(D)\otimes H^0(D) \twoheadrightarrow H^0(2D)$. Scegliamo $M = \sum_{i=1}^{d_1} p_i$ divisore generico di grado $d_1 = d-(g+1)$, e poniamo $F := D-M$.

Claim: per p_i generici, $H^1(F)=0$, $H^1(M)=0$ e $|F|$ è bpf.

Claim $\Rightarrow \exists$ succ. esatta $0 \to \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}_M \to 0$ t.c. $H^1(F)=0$, $|F|$ bpf e $H^1(D-F) = H^1(M) = 0$. Teo. 1 (o teo. 2) $\Rightarrow$
$\Rightarrow H^0(F)\otimes H^0(D) \twoheadrightarrow H^0(F+D)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(F)\otimes H^0(D) \arrow[r] \arrow[d, "m_1"] & H^0(D)\otimes H^0(D) \arrow[r] \arrow[d, "m_2"] & H^0(\mathcal{O}_M)\otimes H^0(D) \arrow[r] \arrow[d, "m_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(F+D) \arrow[r] & H^0(2D) \arrow[r] & H^0(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$|D|$ bpf

m_1 suri. per quanto visto, m_3 suri. perché D molto ampio e $\mathcal{O}_M$ 0-dim. $\Rightarrow m_2$ suri..

Ⓑ $\forall m \geq 3$ $H^0(D)\otimes H^0((m-1)D) \twoheadrightarrow H^0(mD)$. Segue dal teo. 1 poiché $H^1((m-1)D-D) = H^1((m-2)D) = 0$ poiché $\deg((m-2)D) \geq 2g+1$.
Induzione.

Dim. del claim: ① M divisore generico di grado $d_1 \geq g \Rightarrow H^1(M)=0$.

Se $H^1(M)\neq 0$, Serre $\Rightarrow H^0(K_X - M)\neq 0 \Rightarrow \exists$ divisore N t.c. $N \sim K_X - M$, e $d_2 = \deg N = 2g-2-d_1 \leq g-2$.

$\Psi: \mathrm{Div}_+^{d_2}(X) \to \mathrm{Pic}^{d_2}(X) \cong \mathrm{Jac}(X)$. Quindi
$N \longmapsto \mathcal{O}_X(K_X - N)$

$H^1(M)\neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{O}_X(M) \in \mathrm{Im}\,\Psi$, ma $\dim \mathrm{Div}_+^{d_2}(X) = d_2 < g \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\,\Psi) < g = \dim \mathrm{Jac}(X)$, cioè M generico $\notin \mathrm{Im}\,\Psi$.

② F generico t.c. $\deg F = g+1 \Rightarrow H^1(F)=0$ e $|F|$ bpf.

$H^1(F)=0$ per ①. Sia $q\in X$; allora q è pto base per $|F| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H^0(F) \to 0 \in H^0(\mathcal{O}_q) = \mathbb{C}_q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H^0(F) \to 0 \to \mathbb{C}_q \to H^1(F-q) \to H^1(F)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H^1(F-q)\neq 0 \underset{\text{Serre}}{\Leftrightarrow} H^0(K_X - F + q)\neq 0$ e si conclude come sopra usando

$\Psi: \mathrm{Div}_+^{g-2}(X)\times X \to \mathrm{Pic}^{g+1}(X) \cong \mathrm{Jac}(X)$.
$(N,q) \mapsto \mathcal{O}_X(K_X - N + q)$ $\quad\square\square$