Varietà

Def.: una VARIETÀ TOPOLOGICA di dimensione n è uno s.t. X Hausdorff e a base numerabile che è loc. omeo. a $\mathbb{R}^n$.

Def.: X n-varietà topologica. Una CARTA per X è un omeo. $\varphi: U \to V$ con $U \subseteq X$ aperto, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
$\varphi^{-1}: V \to U$ è una PARAMETRIZZAZIONE.

Data $\varphi': U' \to V'$ altra carta, $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ (dove definita) è la MAPPA DI TRANSIZIONE fra φ e φ': $\varphi' \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$.

Def.: un ATLANTE per una varietà top. X è $\mathcal{A} = \{\underbrace{\varphi_i: U_i \to V_i}_{\text{carte}}\}$ t.c. $\bigcup_i U_i = X$. Un atlante è LISCIO (C^∞) se ogni funzione di transizione è liscia (C^∞).

Def.: una VARIETÀ LISCIA (DIFFERENZIABILE) è una coppia $(M, \mathcal{A})$ dove M varietà top., $\mathcal{A}$ atlante liscio su M.

Es.: $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{A} = \{id: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$;
aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{A} = \{id: U \to U\}$.
Se $(M, \mathcal{A})$ è varietà liscia e $U \subseteq M$ aperto allora $(U, \mathcal{A}_U)$ è varietà liscia, dove se $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \to V_i\}$,
$\mathcal{A}' = \{\varphi_i' = \varphi_{i|U \cap U_i}: U \cap U_i \to \varphi_i(U \cap U_i)\}$.

Def.: M varietà top., $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ atlanti (lisci) sono COMPATIBILI se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è atlante liscio.

Def. 1: una varietà liscia è $(M, [\mathcal{A}])$ dove $[\mathcal{A}]$ è classe di equivalenza di atlanti compatibili.

Def. 2: " " " " $(M, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ atlante MASSIMALE (contiene tutte le carte compatibili).

La sfera: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.

Def.: $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. **Ex.:** $\exists\, \varphi: B^n \to \mathbb{R}^n$ omeo.

Oss.: X s.t. è loc. omeo. a $\mathbb{R}^n \iff$ è loc. omeo. a qualche aperto di $\mathbb{R}^n$.

Per $i = 1, \dots, n+1$, $U_i^\pm = \{x \in S^n \mid x_i \gtrless 0\}$, $\varphi_i^\pm: U_i^\pm \to B^n$, $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$

] $\varphi_i^\pm$ sono omeo. con inversa

$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_{i+1}, \dots, y_n)$.

Ex.: l'atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_i^\pm\}$ è liscio.

Altro atlante: sia $N = (0, \dots, 0, 1)$, $U = S^n \setminus \{N\}$,
$\varphi^N: U \to \mathbb{R}^n$ con la proiezione stereografica. Analogo con $S = (0, \dots, 0, -1)$.

Ex.: l'atlante $\mathcal{A}'$ che ne risulta è liscio.

Ex.: $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono compatibili.

Ex.: costruire su $\mathbb{R}$ un atlante $\mathcal{A}'$ non compatibile con quello standard.

Spazio proiettivo: $\underset{\uparrow}{\mathbb{RP}^n} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, $v \sim \lambda v$ $\forall v \neq 0, \lambda \neq 0$.
cpt, connesso, var. top.

$\forall i = 1, \dots, n+1$, $E_i = \{x_i \neq 0\}$, $\varphi_i: E_i \to \mathbb{R}^n$.
$[x_1, \dots, x_{n+1}] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$

$\varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]$.

Ex.: $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sono lisce $\Rightarrow \mathcal{A} = \{\varphi_i\}$ è liscio.

Grassmaniana: V s.v., $k \in \mathbb{N}$, $Gr_k(V) = \{W^k \subseteq V \text{ } k\text{-sottospazio}\}$.
$Gr_k(\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di varietà liscia.

X insieme. **Def.:** un ATLANTE LISCIO su X è $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \to V_i\}$ t.c. le φ_i sono biunivoche, $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \underbrace{\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)}_{\text{li chiedo aperti}}$ sono lisce.

Ex.: posso definire una topologia su X così:
$U \subseteq X$ è aperto $\iff \varphi_i(U \cap U_i) \subseteq V_i$ è aperto $\forall i$.

Per la grassmaniana: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V,
$V = \underset{\{v_1, \dots, v_k\}}{W^k} \oplus \underset{\{v_{k+1}, \dots, v_n\}}{Z^{n-k}}$, $U_{\mathcal{B}} = \{W' \subset V \mid W' \oplus Z = V\}$.

Ex.: $\overbrace{Z \times \dots \times Z}^{k} \to U_{\mathcal{B}}$ è biunivoca.
$(z_1, \dots, z_k) \mapsto \mathrm{Span}(v_1 + z_1, \dots, v_k + z_k)$

Ex.: verificare che viene un atlante liscio.