Funzioni lisce

Def.: $f: M^m \to N^n$ è LISCIA se lo è letta in carte, cioè continua e $\forall x \in M$ $\exists$ $\underbrace{\varphi: W \to Z}_{\text{intorno di } f(x)}$, $\underbrace{\psi: U \to V}_{\text{intorno di } x}$ carte t.c. $f(U) \subseteq W$ e chiedo che $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}: V \to Z$ sia liscia. $F = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ è f letta in carte.

Oss.: f liscia $\Rightarrow$ ogni F così costruita è liscia.

Es.: $U \subseteq M$ aperto, $i: U \hookrightarrow M$ è liscia.

$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $i: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ è liscia.

$i: S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$ è liscia.

$i: S^n \to \mathbb{RP}^n$, $x \mapsto [x]$ è liscia.

Def.: $f: M \to N$ liscia è un DIFFEOMORFISMO se $\exists\, g: N \to M$ liscia t.c. $f \circ g = id_N$, $g \circ f = id_M$.

Es.: $f: B^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$, $g: \mathbb{R}^n \to B^n$, $y \mapsto \frac{y}{\sqrt{1+\|y\|^2}}$.

Ex.: $\mathbb{RP}^1 \underset{\text{diffeo.}}{\cong} S^1$. $\mathbb{RP}^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \xrightarrow{f^{-1}} S^1$, $[t,u] \mapsto t/u$; $f: S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}$ proiezione stereografica, $N \mapsto \infty$.

La composizione e l'inversa sono lisce.

Es.: $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{CP}^n$ ha un atlante a valori in $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

Ex.: $\mathbb{CP}^1 \underset{\text{diffeo.}}{\cong} S^2$.

Notazione: $(a,b) \xrightarrow{\alpha} M$ si chiama CURVA.

Spazio tangente

Def. 1: $x \in M$, $T_xM = \{\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \mid \alpha(0) = x\}/\sim$, dove

$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow$ lette in carte hanno la stessa derivata in 0: $\exists (\forall)$ φ carta t.c., poste $A = \varphi \circ \alpha$, $B = \varphi \circ \beta$, allora $A'(0) = B'(0)$ (con la dovuta attenzione ai domini).

Def. 2: una DERIVAZIONE in $x \in M$ è un modo di associare a ciascuna $f \in C^\infty(U(x))$ $\forall U(x)$ un numero $v(f) \in \mathbb{R}$ t.c.

1) se $f \equiv g$ su un aperto $U(x)$, allora $v(f) = v(g)$;
2) $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$;
3) $v(f \cdot g) = v(f) g(x) + f(x) v(g)$ (regola di Leibniz).

$T_xM = \{\text{derivazioni in } x\}$.

Es.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x \in U$.

Con la def. 1, $T_xU = \{\alpha\}/\sim \to \mathbb{R}^n$, $\alpha \mapsto \alpha'(0)$.

Con la def. 2, $v \in \mathbb{R}^n$, $\partial_v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ è una derivazione.

Prop.: tutte le derivazioni in x sono del tipo ∂_v per $v \in \mathbb{R}^n$.

Dim.: sia v una derivazione. WLOG $x = 0$. $f \in C^\infty(\underset{0}{\overset{\cup}{U}})$,

Taylor: $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) x^i + \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x) x^i x^j$

$\left(h_{ij}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)\right)$. $v(f) = \underset{f(0)v(1)}{\underset{\parallel}{v(f(0))}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) v(x^i) + \sum_{i,j=1}^n v(h_{ij}(x) x^i x^j)$.

$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1) \Rightarrow v(1) = 0$.

Usando Leibniz, $v(h_{ij}(x) x^i x^j) = 0$. Allora

$$v(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) v(x^i) = \partial_w(f), \quad w^i = v(x^i). \quad \square$$

Conclusione: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x \in U$, allora $T_xU = \mathbb{R}^n$.

Oss.: T_xM è spazio vettoriale.

Equivalenza delle def. 1 e 2: $T_x^1M \to T_x^2M$, $[\alpha] \mapsto v(f) = (f \circ \alpha)'(0)$.

Ex.: è 1-1.

Def.: $f: M \to N$, $x \in M$. Il DIFFERENZIALE di f in x è $df_x: T_xM \to T_{f(x)}N$. **Ex.:** sono ben def. e coincidono.

$[\alpha] \overset{\text{def. 1}}{\longmapsto} [f \circ \alpha]$

$v \overset{\text{def. 2}}{\longmapsto} w$, $w(g) = v(g \circ f)$

Proprietà funtoriali: $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$, $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$, vale la CHAIN RULE:

$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$. La dim. è una semplice verifica.

$d\,id_x = id_{T_xM}$.

Cor.: $\varphi: M \to N$ diffeo., $x \in M \Rightarrow d\varphi_x: T_xM \to T_{\varphi(x)}M$ è un isomorfismo.

Dim.: ovvia dalle proprietà funtoriali. $\square$

Oss.: $x \in U \subseteq M$ aperto $\Rightarrow T_xU = T_xM$.

Il differenziale in carte

$x \in M^m \xrightarrow{f} N^n$, F in carte ($x \overset{\varphi}{\mapsto} y$, $f(x) \overset{\psi}{\mapsto} F(y)$ tramite le carte).

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "df_x"] \arrow[d, "d\varphi_x", "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T_{f(x)}N \arrow[d, "d\psi_{f(x)}", "\wr"'] \\ \mathbb{R}^m = T_yV \arrow[r, "dF_y"] & T_{F(y)}Z = \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

matrice jacobiana

⌜Usando una carta (che è un diffeo.), si vede che $\dim T_xM = \dim M$.⌟