Def.: $f: M \to N$, $p \in M$, f è un DIFFEOMORFISMO LOCALE in p se $\exists$ $U(p)$, $V(f(p))$ t.c. $f(U)=V$, $f_{|U}: U \to V$ diffeo..

Teo. (invertibilità locale): $f: M^m \to N^n$, $p \in M$, f è diffeo. loc. in $p \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ è invertibile.

Dim.: ($\Rightarrow$) ovvia dalle proprietà funtoriali di f.
($\Leftarrow$) Leggo f in carte:

$$\begin{tikzcd} U(p) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] & W(f(p)) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathbb{R}^m \supseteq V \arrow[r, "F"] & Z \subseteq \mathbb{R}^n \end{tikzcd},$$

per F è un teorema di analisi.
df_p invertibile $\Leftrightarrow dF_{\varphi(p)}$ invertibile.
Allora F diffeo. loc. $\Rightarrow f$ diffeo. loc.. $\square$

Cor.: $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ non sono diffeo. se $m \neq n$.

Def.: un RIVESTIMENTO LISCIO è un rivestimento $\pi: M \to N$ tra varietà lisce che è anche un diffeo. loc..

Es.: $\begin{aligned} S^n &\to \mathbb{RP}^n \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$ è un rivestimento liscio.

X s.t., $G \curvearrowright X$, $G \to \mathrm{Omeom}(X)$. L'azione è
- LIBERA se $g(x) \neq x \ \forall x \ \forall g \neq id$;
- PROPRIAMENTE DISCONTINUA se $\forall x, y \in X \ \exists U(x), U(y)$ t.c. $\#\{g \in G \mid g(U(x)) \cap U(y) \neq \emptyset\}$ è finita.

Teo.: $G \curvearrowright X$ libera e propriamente discontinua, X Hausdorff, allora $X \to X/G$ è un rivestimento e X/G è Hausdorff.

Def.: un'AZIONE LISCIA di G su una varietà liscia M è $G \to \mathrm{Diffeom}(M)$, $G \curvearrowright M$.

Teo.: $G \curvearrowright M$ azione liscia su una varietà M; se è libera e propriamente discontinua, il quoziente M/G ha una struttura di varietà liscia e $M \to M/G$ è riv. liscio.

Dim.: so che $M \to M/G$ è riv. topologico.
Filosofia generale con i rivestimenti
$\tilde{M}$ rivestimento top.. Se M è varietà liscia $\mathcal{A}$,
$\downarrow \pi$ allora $\tilde{M}$ eredita una struttura di var. liscia $\tilde{\mathcal{A}}$.
M Fatto generale: M è loc. omeo. a $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{M}$ lo è.
Da $\mathcal{A}$ a $\tilde{\mathcal{A}}$: $\varphi \rightsquigarrow \varphi \circ \pi$ (con attenzione ai domini).
La dimostrazione è un disegno. $\square$

Prodotti

$\underset{\mathcal{A}}{M^m}$, $\underset{\mathcal{A}'}{N^n}$ varietà $\Rightarrow M \times N$ ha naturale struttura di varietà
$\mathcal{A} \times \mathcal{A}' = \left\{ \varphi \times \varphi' : \underset{(x,y) \mapsto (\varphi(x), \varphi'(y))}{U \times U' \to V \times V'} \,\middle|\, \begin{matrix} \varphi: U \to V \\ \varphi' : U' \to V' \end{matrix}, \varphi \in \mathcal{A}, \varphi' \in \mathcal{A}' \right\}$.

Es.: toro n-dimensionale $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$.
Come quoziente: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ per traslazioni è libera e propriamente discontinua. $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ è ancora un toro.

Es.: $G = \langle \gamma, \eta \rangle \curvearrowright \mathbb{R}^2$, $\gamma(x,y) = (x+1, y)$, $\eta(x,y) = (-x, y+1)$ è libera e propriamente discontinua.
$\mathbb{R}^2/G$ è la bottiglia di Klein.

Es.: $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$.
$\omega = e^{2\pi i/p}$, $(p,q)=1$. $\omega^p = 1$, $\omega^n \neq 1 \ \forall n < p$.
$G = \{1, \omega, \ldots, \omega^{p-1}\} \curvearrowright S^3$, $\omega(z,w) = (\omega z, \omega^q w)$.
L'azione di G è libera e propr. disc..
$L(p,q) = S^3/G$ è lo spazio lenticolare.
S^3 è il riv. univ. $\Rightarrow \pi_1(L(p,q)) \cong G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Varietà orientate

Def. 1: una VARIETÀ ORIENTATA è M dotata di un ATLANTE ORIENTATO, cioè atlante liscio con $\det(\varphi_{ij})_x > 0 \ \forall \varphi_{ij}$ funzione di transizione $\forall x$.
Due atlanti orientati sono ORI-COMPATIBILI se la loro unione è ancora un atlante orientato.

Es.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è varietà orientata $\mathcal{A} = \{id_U\}$.

Def. 2: V $\mathbb{R}$-s.v., $\dim V = n$. Un'ORIENTAZIONE per V...
$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V, $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ se $\det \underset{\text{cambiamento di base}}{M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} > 0$

... è la scelta di uno dei due insiemi di basi (POSITIVO).
Una VARIETÀ ORIENTATA è con una scelta di orientazione di $T_pM \ \forall p \in M$ localmente coerente, cioè $\forall p \ \exists U(p) \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall q \in U(p)$ $d\varphi_q : T_qM \to T_{\varphi(q)}V = \underset{\substack{\text{la base canonica} \\ \text{è positiva}}}{\mathbb{R}^n}$ manda basi positive in basi positive.

Def. 1 $\Rightarrow$ Def. 2: M con $\mathcal{A}$ orientato, do a T_xM l'orientazione indotta da $d\varphi_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$. Questo funziona perché $\mathcal{A}$ è orientato.
Def. 2 $\Rightarrow$ Def. 1: $\forall x \ \exists U(x) \xrightarrow{\varphi_x} V \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. ...,
$\mathcal{A} = \{\varphi_x\}$. Ex.: è orientato.

Prop.: M connessa $\Rightarrow$ ha 0 oppure 2 orientazioni.

Dim.: se $\exists$ $\mathcal{A}$ orientato, $\exists$ $-\mathcal{A}$ atlante opposto: $\underset{(\det d\rho_x < 0 \ \forall x)}{\rho: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ riflessione}}$,
$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}$, $-\mathcal{A} = \{\rho \circ \varphi_i\}$ è orientato, ma non è ori-compatibile con $\mathcal{A}$. Quindi ho σ e $-\sigma$ orientazioni.
Sia σ' altra orientazione su M. In ogni pto, coincide con σ o $-\sigma$, per località i due insiemi sono aperti, ma M connessa, assurdo. $\square$

Def.: M è ORIENTABILE se ha un'orientazione.

Es.: Möbius: $\mathbb{R}^2/\langle \eta \rangle$, $\eta(x,y) = (-x, y+1)$. Non è orientabile.

Def.: $\varphi: M \to N$ diffeo. tra varietà orientate PRESERVA l'orientazione se $\forall x \in M$ $d\varphi_x$ manda basi + in basi +, INVERTE "
" " " " " + " −.

Ex.: M connessa $\Rightarrow \varphi$ preserva o inverte.

Oss.: M orientata connessa, $\varphi: M \to M$ diffeo., preservare o invertire non dipende dall'orientazione scelta.

Prop.: $G \curvearrowright M$ in modo libero e propr. disc.. M/G è orientabile $\Leftrightarrow$ lo è M e G preserva l'orientazione (cioè $\forall g \in G$ g preserva).

Cor.: nastro di Möbius e bottiglia di Klein non sono orientabili.

Dim. (della prop.): è di nuovo un disegno. $\square$

Prop.: S^n è orientabile. **Dim.:** ex.. Hint: atlante con due carte a intersezione connessa. $\square$

Cor.: $\mathbb{RP}^n$ è orientabile $\Leftrightarrow n$ è dispari.

Dim.: $\mathbb{RP}^n = S^n / \langle i \rangle$, $i(x) = -x$ è composizione di $n+1$ riflessioni. $\square$